

Yüksek Mertebeden Dif. Denklemler

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (n \geq 2)$$

n. mertebeden dif. denklem

$$G(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad \text{Genel çözüm.}$$

n. mertebeden lineer dif. denklemler:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n$ $a_i(x) \rightarrow \text{Katsayı}$

$$f(x) = 0 \rightarrow \text{2. taraflı dif. denk.}$$

$$f(x) \neq 0 \rightarrow \text{2. taraflı dif. denk.}$$

$$y''' - 3xy'' + 2y = 0 \quad \begin{array}{l} \text{3. mertebeden} \\ \text{lineer dif.} \end{array}$$

deg. 3 den kat. (2. taraflı)

$$* y^{(4)} - 2y''' + 4y'' - 5y = \sin x$$

4. mertebeden sabit katsayılı lineer dif. (2. taraflı)

n. mertebeden sabit katsayılı lineer dif. denklemler

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n$ $a_i \in \mathbb{R}$ sabit katsayılı

Bu dif. denklemleri çözmek için önce 2. taraflı dif.

denk. közülecek Daha sonra 2. taraflı dif. denk.
közülecek

→ Belirsiz Katsayılar yöntemi
→ Sabitlerin (parametrelerin) değeri yöntemi.

2. tarafta d.f. denklemleri:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

Teorem: (1) denkleminin çözümü $y = e^{rx}$ şeklindedir.

$$y' + y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \rightarrow \ln y - \ln C = -x$$

$$\ln \frac{y}{C} = -x \rightarrow \frac{y}{C} = e^{-x} \\ y = C e^{-x}$$

$$\begin{aligned} y &= e^{rx} \\ y' &= r e^{rx} \\ y'' &= r^2 e^{rx} \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= r^n e^{rx} \end{aligned}$$

$$a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + a_2 r^{n-2} e^{rx} + \dots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} = 0 \\ e^{rx} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = 0$$

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-2} r^2 + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Karakteristik denklem (polinom)

n. dereceden polinomun n tane kök vardır.

$$\begin{aligned} r = r_1 &\rightarrow y_1 = e^{r_1 x} \\ r = r_2 &\rightarrow y_2 = e^{r_2 x} \\ &\vdots \\ r = r_n &\rightarrow y_n = e^{r_n x} \end{aligned}$$

meritbe sayısı kadar
Çözüm çıkacak!

$$y'' - 2y' + 6y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 6 = 0$$

Teorem: ① denkleminin genel çözümü

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n \quad (2)$$

şeklinde dir.

Burada ② nin genel çözüm olabilmesi için gerek ve yeter şart; $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ çözüm fonksiyonlarının lineer bağımsız olmasıdır.

Lineer Bağımlılık - Bağımsızlık

$C_1, C_2, \dots, C_n$ sabitler olmak üzere;

eğer $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$ eşitliği

$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ olduğu zaman gerçekleşiyorsa

$y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlar lineer bağımsızdır. Aksi halde fonksiyonlar lineer bağımlıdır.

n tane fonksiyonun lineer bağımsız olması için gerek. Wronski determinantının 0'dan farklı olmasıdır.

$$|W| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} |W| \neq 0 \\ y_1, y_2, \dots, y_n \text{ lineer} \\ \text{bağımsızdır.} \end{array}$$

Örnek

$$y_1 = \sin 3x$$

$$y_2 = \cos 3x$$

a) y_1 ve y_2 lineer bağımsız mıdır?
b) Eğer lineer bağımsız ise bu iki fark.
aynı anda çözüm kabul eden
dif. denklemini bulunuz

a) C_1, C_2 $C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x = 0$

$$|W| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{vmatrix} =$$
$$-3\sin^2 3x - 3\cos^2 3x$$
$$= -3(\sin^2 3x + \cos^2 3x)$$
$$= -3 \neq 0$$

y_1 ve y_2 lineer bağımsızdır.

b)

$$y = \underbrace{C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x}$$

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x$$

$$y'' = -9C_1 \sin 3x - 9C_2 \cos 3x$$

$$= -9(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_y$

$$y'' = -9y \Rightarrow y'' + 9y = 0$$

2. mertebeden sabit katsayılı (2. terim)
dif. Denk.

Örnek

$y''' - 3y'' + 2y' = 0$ dif. denklemini çözünüz.

$$\left. \begin{aligned} y &= e^{rx} \\ y_1 &= re^{rx} \\ y_2 &= r^2 e^{rx} \\ y_3 &= r^3 e^{rx} \end{aligned} \right\}$$

$$* r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} + 2r e^{rx} = 0$$

$$\cancel{e^{rx}} (r^3 - 3r^2 + 2r) = 0$$

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0$$

$$r(r^2 - 3r + 2) = 0$$

$$r(r-1)(r-2) = 0$$

$$r_1 = 0 \rightarrow y_1 = e^{0x} = 1$$

$$r_2 = 1 \rightarrow y_2 = e^x$$

$$r_3 = 2 \rightarrow y_3 = e^{2x}$$

$$\begin{aligned} |W| &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} \\ &= 4e^{3x} - 2e^{3x} = 2e^{3x} \neq 0 \end{aligned}$$

$y_1 = 1, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$ lineer bağımsızdır.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

Sonuç 1: Eğer karakteristik polinomun kökleri birbirinden farklı ise elde edilen çözüm fonksiyonları lineer bağımsızdır.

Örnek $y'' - 9y = 0$

$$r^2 - 9 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+3) = 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} r_1 = -3 \\ r_2 = 3 \end{matrix} \right\} \lambda_{1,2} = \pm 3$$

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$$

Örnek $2y'' + y' - y = 0$

$$2r^2 + r - 1 = 0$$

$$\begin{matrix} 2r & - & 1 \\ r & + & 1 \end{matrix}$$

$$(2r-1)(r+1) = 0$$

$$r_1 = 1/2 \quad r_2 = -1$$

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-x}$$

Örnek $y'' + y' - 6y = 0$

$$r^2 + r - 6 = 0$$

$$\begin{matrix} r & + & 3 \\ r & - & 2 \end{matrix}$$

$$(r+3)(r-2) = 0$$

$$r_1 = -3 \quad r_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$

Örnek ⑪ $y'' - 2y' + y = 0$

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$(r-1)^2 = (r-1)(r-1) = 0$$

$$r_1 = r_2 = 1$$

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = e^x$$

$$|W| = \begin{vmatrix} e^x & e^x \\ e^x & e^x \end{vmatrix} = 0$$

"linear abhängig"

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x$$

$$= e^x (C_1 + C_2) = C e^x$$

Genel Lösung