Fredholm Metodu

İntegralin temel teoremi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

(a,b) aralığı n parçaya bölerek ve bu aralıkların her birini Δx ile gösterelim

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)u(t)\,dt \qquad (1)$$

$f(x)$ ve $K(x,t)$, $a\le x\le b$ ve $a\le t\le b$ aralığında tanımlı.

(a,b) aralığını n parçaya bölelim ve bu işlemi önce t için yapalım:

$$t_1=a,\quad t_2=a+\Delta t,\ t_3=a+2\Delta t,\ \dots,\ t_n=a+(n-1)\Delta t=b$$

$$\Delta t = \frac{b-a}{n}$$

$K(x,t)u(t)$ çarpımını bunlara göre düzenlersek

$$K(x,t)u(t) = K(x,t_1)u(t_1)+K(x,t_2)u(t_2)+\dots+K(x,t_n)u(t_n)$$

olarak ifade edilir. Bu eşitliğin, $\Delta t = dt$ yazılabileceğinden, sol taraf dt ile çarpar integrale geçilirse, sağ taraf Δt ile çarpımının bir yaklaşık değerini verir. Buna göre;

$$\int_a^b K(x,t)u(t)\,dt \cong \left[K(x,t_1)u(t_1)+K(x,t_2)u(t_2)+\dots+K(x,t_n)u(t_n)\right]\Delta t$$

Bunu (1) de yerine yazarsak

$$u(x) \cong f(x) + \lambda\Delta t\left[K(x,t_1)u(t_1)+K(x,t_2)u(t_2)+\dots+K(x,t_n)u(t_n)\right] \qquad (2)$$

bulunur.

Bu eşitlik $a \le x \le b$ de geçerlidir. Bu kez x için n parçaya bölelim:

$$x_1 = a \;, \; x_2 = a + \Delta x, \; x_3 = a + 2\Delta x, \; \dots, \; x_n = a + (n-1)\Delta x = b$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta = \Delta x = \Delta t = \frac{b-a}{n}$$

(2) denklemini buna göre düzenlersek

$$u(x_1) = f(x_1) + \lambda\Delta\left[K(x_1,t_1)u(t_1) + K(x_1,t_2)u(t_2) + \dots + K(x_1,t_n)u(t_n)\right]$$

$$u(x_2) = f(x_2) + \lambda\Delta\left[K(x_2,t_1)u(t_1) + K(x_2,t_2)u(t_2) + \dots + K(x_2,t_n)u(t_n)\right]$$

$$\vdots$$

$$u(x_n) = f(x_n) + \lambda\Delta\left[K(x_n,t_1)u(t_1) + K(x_n,t_2)u(t_2) + \dots + K(x_n,t_n)u(t_n)\right]$$

sistemini buluruz.

$$i = 1,2,\dots n \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$u(x_i) = u_i \;;\; u(t_i) = u_i \;;\; f(x_i) = f_i \;,\; K(x_i,t_j) = K_{ij}$$

$$u_1 = f_1 + \lambda\Delta\left[K_{11}u_1 + K_{12}u_2 + \dots + K_{1n}u_n\right]$$

$$\vdots$$

$$u_n = f_n + \lambda\Delta\left[K_{n1}u_1 + K_{n2}u_2 + \dots + K_{nn}u_n\right]$$ şeklinde yazabiliriz.

$$\left.\begin{array}{l}
(1-\lambda\Delta K_{11})u_1 - \lambda\Delta K_{12}u_2 - \dots - \lambda\Delta K_{1n}u_n = f_1 \\
-\lambda\Delta K_{21}u_1 + (1-\lambda\Delta K_{22})u_2 - \dots - \lambda\Delta K_{2n}u_n = f_2 \\
\quad\vdots \\
-\lambda\Delta K_{n1}u_1 - \lambda\Delta K_{n2}u_2 - \dots + (1-\lambda\Delta K_{nn})u_n = f_n
\end{array}\right\} \quad (3)$$

sistemi buluruz.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}
1-\lambda\Delta K_{11} & -\lambda\Delta K_{12} & \dots & -\lambda\Delta K_{1n} \\
-\lambda\Delta K_{21} & 1-\lambda\Delta K_{22} & \dots & -\lambda\Delta K_{2n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
-\lambda\Delta K_{n1} & -\lambda\Delta K_{n2} & \dots & 1-\lambda\Delta K_{nn}
\end{vmatrix}$$

③ $n\to\infty$ n $\Delta(\lambda)$ $n\to\infty$ sonsuz satır-sütunlu

Fredholm determinantı

$$\lim_{n\to\infty}\Delta(\lambda)=D(\lambda)$$

$\Delta(\lambda)$ λ nın n. dereceden bir polinomu olarak açılırsa

$$\Delta(\lambda)=1-\frac{\lambda\Delta}{1!}\sum_{i=1}^{n}K_{ii}+\frac{\lambda^2\Delta^2}{2!}\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{vmatrix}-\frac{\lambda^3\Delta^3}{3!}\sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ k=1}}^{n}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij} & K_{ik}\\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jk}\\ K_{ki} & K_{kj} & K_{kk}\end{vmatrix}+\cdots$$

$n\to\infty$ λ ya göre

$$\Delta_i(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda K_{11}\cdots & -\lambda K_{1i-1} & f_1 & -\lambda K_{1i+1}\cdots & -\lambda K_{1n}\\ -\lambda K_{21}\cdots & -\lambda K_{2i-1} & f_2 & -\lambda K_{2i+1}\cdots & -\lambda K_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -\lambda K_{n1}\cdots & -\lambda K_{ni-1} & f_n & -\lambda K_{ni+1}\cdots & 1-\lambda K_{nn}\end{vmatrix}$$

Bu da $n\to\infty$ için sonsuz satır-sütunlu Fredholm determinantıdır

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_i(\lambda)=D(x,t;\lambda)$$

$$\Gamma(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}\Rightarrow u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\Gamma(x,t;\lambda)f(t)\,dt$$

$$u(x)=f(x)+\frac{\lambda}{\Delta(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)\,dt$$

$$D(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\Delta(\lambda)$$

$$D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b K(t_1,t_1)\,dt_1+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2)\\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)\end{vmatrix}dt_1dt_2$$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\cdots(n)\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_n)\\ \vdots & & \vdots\\ K(t_n,t_1) & & K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n+\cdots$$

$$A_n = \int_a^b \cdots (n) \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ K(t_n,t_1) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n$$ alınırsa

$$\boxed{D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n A_n}$$ olarak ifade edilebilir.

Benzer şekilde $\Delta_i(\lambda)$ determinantının açılımını yaptığımızda n. terimde n katlı integral B_n ile gösterilirse

$$B_n(x,t) = \int_a^b \cdots (n) \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \cdots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n$$

olacağından

$$D(x,t;\lambda) = \lim_{n\to\infty} \Delta_i(\lambda)$$

$$\boxed{D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n B_n(x,t)}$$

$B_n(x,t)$ $\qquad$ A_n

$D(\lambda)$ Fredholm determinantı (K determinantı)

$D(x,t;\lambda)$ Fredholm'ün birinci minörü

Eğer $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu sınırlı ve $\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt$ sonlu ise

$D(\lambda)$ ve $D(x,t;\lambda)$ seriler λ ne olursa olsun. λ nın

$\Gamma(x,t;\lambda)$ λ nın bir analitik fonk. $D(\lambda) \neq 0$

$D(\lambda)$'yı sıfır yapan noktalara <u>kutup noktası</u> denir

Örnek $K(x,t) = xe^{t}$, $a=0$ ve $b=1$ Resolvent Fredholm det. ile hesaplayalım.

$$A_1 = \int_0^1 K(t_1,t_1)\,dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1}\,dt_1 = e^{t_1}(t_1-1)\Big|_0^1 = 0-(-1) = 1$$

$$A_2 = \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = \int_0^1\int_0^1 \underbrace{\begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix}}_{=0} dt_1 dt_2 = 0$$

$$A_3 = A_4 = \dots = 0$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n A_n = 1-\lambda$$

$$B_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) \end{vmatrix} dt_1 = \int_0^1 \underbrace{\begin{vmatrix} xe^{t} & xe^{t_1} \\ t_1e^{t} & t_1e^{t_1} \end{vmatrix}}_{=0} dt_1 = 0$$

$$B_2(x,t) = \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & K(x,t_2) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} xe^{t} & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^{t} & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t} & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0$$

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n B_n(x,t)$$

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) = xe^{t}$$

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^{t}}{1-\lambda}$$ ($\lambda=1$ kutup nok.)

Soru $u(x) = e^{-x} + \lambda\int_0^1 xe^{t}u(t)\,dt$ İnt. denk. Fredholm metodu ile çözünüz.

$$u(x) = e^{-x} + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1-\lambda} e^{-t}\, dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,t;\lambda) f(t)\, dt$$

Fredholm Yöntemi ile bulundu!

$$u(x) = e^{-x} + \frac{\lambda x}{1-\lambda} \quad (\lambda \neq 1)$$

SORU: $a = 0$, $b = 1$ $\quad K(x,t) = x - t$ (Fredholm det.)