

İkinci tür Volterra İN. Denklemleri

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u(t) dt$$

Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Bu yöntem, $u(x)$ fonksiyonunun ayrıştırma serisi tarafından sonsuz sayıda bileşenli toplamına ayrılmasını içerir.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

$$u(x) = \underbrace{u_0(x)} + \underbrace{u_1(x)} + \underbrace{u_2(x)} + \dots$$

Burada $u_n(x)$ ($n \geq 0$) bileşenleri tekrarlı bir şekilde belirlenecektir. Bu yöntem bileşenleri bulmak ile ilgilidir. Bu işleri kolayca hesaplanabilen basit integraleri içeren bir rekürans bağıntısı yoluyla gerçekleştirilir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u(t) dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt$$

$$\underline{u_0(x)} + \underline{u_1(x)} + \underline{u_2(x)} + \dots = \underline{f(x)} + \lambda \int_0^x K(x,t) [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots] dt$$

Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = f(x) \\ u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) u_n(t) dt \end{array} \right\} \text{ Rekürans bağıntısı}$$

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) u_0(t) dt = \lambda \int_0^x K(x,t) f(t) dt$$

$$u_2(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) u_1(t) dt$$

⋮

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

Übung

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t) dt$$

$$f(x) = 1$$

$$K(x,t) = 1$$

$$\lambda = -1$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt$$

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = 1 - \int_0^x [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots] dt$$

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = - \int_0^x u_0(t) dt = - \int_0^x 1 dt = -x$$

$$u_2(x) = - \int_0^x u_1(t) dt = - \int_0^x (-t) dt = \frac{x^2}{2!}$$

$$u_3(x) = - \int_0^x u_2(t) dt = - \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = - \frac{x^3}{3!}$$

⋮

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

$$u(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = e^{-x}$$

$$\boxed{u(x) = e^{-x}}$$

$$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \frac{v^4}{4!} + \dots \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Örnek

$$u(x) = 1 + \int_0^x (t-x) u(t) dt \quad f(x) = 1 \quad \lambda = 1$$

$$K(x, t) = t - x$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = 1 + \int_0^x (t-x) [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots] dt$$

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = \int_0^x (t-x) \cdot 1 dt = \left(\frac{t^2}{2} - xt \right) \Big|_0^x = \frac{x^2}{2} - x^2 = -\frac{x^2}{2!}$$

$$u_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x (t-x) t^2 dt = -\frac{1}{2} \int_0^x (t^3 - xt^2) dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{t^4}{4} - x \frac{t^3}{3} \right] \Big|_0^x$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{3} \right] = \frac{x^4}{4!}$$

$$u_3(x) = \frac{1}{4!} \int_0^x (t-x) t^4 dt = -\frac{x^6}{6!}$$

⋮

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

$$u(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \cos x$$

$$u(x) = \cos x$$

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \frac{v^6}{6!} + \dots \quad (\forall v \in \mathbb{R})$$

örnek

$$u(x) = 2 + \frac{1}{3} \int_0^x x t^3 u(t) dt$$

Volterra int. denklemini Adomian Aynstımı yönt. çözmek.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

$$u_0(x) = 2$$

$$u_{k+1}(x) = \frac{1}{3} \int_0^x x t^3 u_k(t) dt \quad \left. \vphantom{u_{k+1}(x)} \right\} \text{Rekürans başlatılır}$$

$$u_1(x) = \frac{1}{3} \cdot 2 \int_0^x x t^3 dt = \frac{2x}{3} \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{1}{6} x^5$$

$$u_2(x) = \frac{1}{3} \int_0^x x t^3 \frac{1}{6} t^5 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{x^{10}}{9} = \frac{1}{6 \cdot 3^3} x^{10}$$

$$u_3(x) = \frac{1}{3} \int_0^x x t^3 \frac{1}{6 \cdot 3^3} t^{10} dt = \frac{1}{6 \cdot 3^4 \cdot 14} x^{15}$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 2 + \frac{1}{6} x^5 + \frac{1}{6 \cdot 3^3} x^{10} + \frac{1}{6 \cdot 3^4 \cdot 14} x^{15} + \dots$$

Bu serinin yakınsadığı fark bulmak imkansızdır. Bu seri seriyi sayısal yöntemlerde kullanılabilir. Daha fazla bileşen bularak daha doğru cevap ulaşabiliriz.

ARA VERDİK !

örnek $u(x) = 5x^3 - x^5 + \int_0^x t u(t) dt$

* $u_0(x) = 5x^3 - x^5$ } Rekürans başıntısı
 $u_{k+1}(x) = \int_0^x t u_k(t) dt$

* $u_1(x) = \int_0^x t (5t^3 - t^5) dt = \int_0^x (5t^4 - t^6) dt = x^5 - \frac{x^7}{7}$

* $u_2(x) = \int_0^x t \left(t^5 - \frac{t^7}{7} \right) dt = \int_0^x \left(t^6 - \frac{t^8}{7} \right) dt = \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{63}$

* $u_3(x) = \int_0^x t \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{63} \right) dt = \int_0^x \left(\frac{t^8}{7} - \frac{t^{10}}{63} \right) dt = \frac{x^9}{63} - \frac{x^{11}}{693}$

$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$

$u(x) = (5x^3 - x^5) + (x^5 - \frac{x^7}{7}) + (\frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{63}) + (\frac{x^9}{63} - \frac{x^{11}}{693}) + \dots$
 $\boxed{u(x) = 5x^3}$

Benzer terimlerin kareli ifadelerle ortaya çıktığı kolaylıkla görülmektedir. Böyle terimlere **noise terms** (gürültü-terimleri) denir.

Sorular

1) $u(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x (t-x)u(t) dt$ cevap: $u(x) = 1 - \sinh x$

2) $u(x) = x + x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 - \int_0^x u(t) dt$ cevap: $u(x) = x + x^4$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Ardışık Yaklaştırma Yöntemi (Picard iterasyon Yönt.)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t) dt$$

Teorem: $[0,a]$ aralığında $f(x)$ 'in, $0 \leq x \leq a$ ve $0 \leq t \leq x$ aralığında ise $K(x,t)$ 'in sürekli olduğunu varsayalım. O halde $u_n(x)$ ardışık yaklaştırma dizisi $n \geq 1$ için int. denklemin $u(x)$ çözümüne yakınsar.

$u_0(x)$, $[0,a]$ aralığında sürekli bir fonk. olsun. Bu fonk. uygunlukla $0, 1, x$ olarak seçilebilir.

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t) dt \rightarrow u_1(x) \text{ te } [0,a] \text{ de sürekli bir fonk.}$$

⋮

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t) dt$$

ile $\{u_n(x)\}$ dizisi bulunur. Bu dizi $n \rightarrow \infty$ için $u(x)$ çözümüne yakınsar.

Örnek $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t) dt$ Ardışık yak. yönt. ile?

$u_0(x) = 1$ (Sıfırıncı yaklaşım)

$$u_n(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_{n-1}(t) dt \quad (n \geq 1)$$

$$u_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_0(t) dt = 1 - \int_0^x (x-t) dt = 1 - \left(xt - \frac{t^2}{2} \right)_0^x = 1 - x^2 + \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$u_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_1(t) dt = 1 - \int_0^x (x-t) \left[1 - \frac{t^2}{2} \right] dt = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$u_3(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_2(t) dt = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$u_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\{u_n(x)\} \quad n \rightarrow \infty \quad u(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \boxed{\cos x = u(x)}$$

Örnek

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x u(t) dt$$

$$a) u_0(x) = 1$$

$$b) u_0(x) = x$$

$$c) u_0(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$a) u_0(x) = 1 ; \quad u_n(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x u_{n-1}(t) dt \quad (n \geq 1)$$

$$u_1(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x u_0(t) dt = \frac{x^2}{2} + x - x = \frac{x^2}{2!} \quad \checkmark$$

$$u_2(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = x + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \right) \quad \checkmark$$

$$u_3(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \left[t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \right] dt = x - \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \right) \quad \checkmark$$

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} \right) + x \quad (n \geq 0)$$

$\{u_n\}$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{\left[(-1)^{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} \right) \right]}_0 + x \right\} = x$$

$\boxed{u(x) = x}$

$$b) \quad u_0(x) = x$$

$$u_1(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x t \, dt = x$$

$$u_2(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x t \, dt = x \quad \dots \quad u_n(x) = x$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n(x)\} = x \implies \boxed{u(x) = x}$$

$$c) \quad u_0(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$u_1(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + t\right) dt$$

$$= \frac{x^2}{2!} + x - \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}\right) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$u_2(x) = \frac{x^2}{2!} + x - \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!}\right) dt$$

$$= \frac{x^2}{2!} + x - \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right) = x + \frac{x^4}{4!}$$

⋮

$$u_n(x) = x + (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \quad (n \geq 0)$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}}_0 \right) = x$$

$$\boxed{u(x) = x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

solu $u(x) = 2x + 2 - \int_0^x u(t) dt$

A. Y. Y.

a) $u_0(x) = 1$

b) $u_0(x) = 2$ ✓
