

Özünü İçerideğin Dİf. Denklemler Yardımlıyla Bulunması

$K(x,t)$ çekirdek fonk. $x-t$ 'nin kuvveti

örneğin

$$K(x,t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + a_2(x)\frac{(x-t)^2}{2!} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (1)$$

şeklinde ve $a_i(x)$ katsayılarının $[0, a]$ aralığında sürekli old. varsayalım.

$$(2) \quad \frac{d^n g}{dx^n} - \lambda \left[a_0(x) \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} + a_1(x) \frac{d^{n-2} g}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(x) g \right] = 0$$

dİf. denkleminin

$$(3) \quad g \Big|_{x=t} = \frac{dg}{dx} \Big|_{x=t} = \dots = \frac{d^{n-2} g}{dx^{n-2}} \Big|_{x=t} = 0 \quad ; \quad \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} \Big|_{x=t} = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir özünü $g(x,t;\lambda)$ gibi bir fonk. olmak üzere (1) ile verilen çekirdek fonk.-nın özünü çekirdek (resolvent)

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dx^n} \quad (4)$$

eşitliği ile tanımlanmıştır.

Örnekle

$K(x,t) = -2 + 3(x-t)$ ve $\lambda = 1$ olan
Resolvanı?

$$\textcircled{1}'\text{den } \left. \begin{array}{l} n-1=1 \\ n=2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha_0(x) = -2 \\ \alpha_1(x) = 3 \end{array} \quad \alpha_2(x) = \dots = \alpha_{n-1}(x) = 0$$

$$\textcircled{2}'\text{den } \frac{d^2 g}{dx^2} - 1 \left[\alpha_0(x) \frac{dg}{dx} + \alpha_1(x) g \right] = 0$$

$g = g(x, t; \lambda)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 g(x, t; 1)}{dx^2} + 2 \frac{dg(x, t; 1)}{dx} - 3 g(x, t; 1) = 0 \\ g(x, t) \Big|_{x=t} = 0 \quad \frac{dg(x, t)}{dx} \Big|_{x=t} = 1 \end{array} \right.$$

Def - denklemini çözelim.

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \quad \begin{array}{l} r_1 = 1 \\ r_2 = -3 \end{array}$$

$$g(x, t; 1) = C_1(t)e^x + C_2(t)e^{-3x}$$

$$g(x, t) \Big|_{x=t} = 0 \rightarrow C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-3t} = 0$$

$$\frac{dg(x, t)}{dx} \Big|_{x=t} = 1 \rightarrow \frac{C_1(t)e^t - 3C_2(t)e^{-3t}}{C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-3t}} = 1$$

$$C_1(t) = \frac{1}{4}e^{-t} \quad C_2(t) = -\frac{1}{4}e^{3t}$$

$$g(x,t) = \frac{1}{4} e^{x-t} - \frac{1}{4} e^{-3(x-t)}$$

$$(4)' \text{ten} \quad R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dx^n}$$

$$R(x,t;1) = \frac{d^2 g(x,t)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{4} e^{x-t} - \frac{1}{4} e^{-3(x-t)} \right]$$

$$\boxed{R(x,t;1) = \frac{1}{4} e^{x-t} - \frac{9}{4} e^{-3(x-t)}}$$

ömek $K(x,t) = 2x$ ve $\lambda = 1$ olan Volterra int. denk. resolantı?

$$n-1=0$$

$$\boxed{n=1}$$

$$a_0(x) = 2x$$

$$a_1(x) = \dots = a_{n-1}(x) = 0$$

$$\frac{dg}{dx} - 2xg = 0$$

$$\frac{dg(x,t;1)}{dx} - 2xg(x,t;1) = 0; \quad g(x,t) \Big|_{x=t} = 1$$

$$g(x,t) \Big|_{x=t} = 1 \rightarrow \left. \begin{array}{l} g(x,t) = C(t)e^{x^2} \\ C(t)e^{t^2} = 1 \\ C(t) = e^{-t^2} \end{array} \right\} g(x,t) = e^{x^2 - t^2}$$

$$R(x,t;1) = \frac{1}{1} \frac{dg(x,t)}{dx}$$

$$R(x,t;1) = 2x e^{x^2-t^2}$$

Ünver $u(x) = x + \int_0^x [2-(x-t)]u(t)dt$

$$K(x,t) = 2-(x-t) \quad \left. \begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} n-1=1 \\ n=2 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_0(x)=2 \\ a_1(x)=-1 \end{array}$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - \left[a_0(x) \frac{dg}{dx} + a_1(x)g \right] = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 g(x,t;1)}{dx^2} - 2 \frac{dg(x,t;1)}{dx} + g(x,t;1) = 0 \\ g(x,t) \Big|_{x=t} = 0 \quad ; \quad \frac{dg(x,t)}{dx} \Big|_{x=t} = 1 \end{array} \right.$$

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \quad (2 \text{ kat kök})$$

$$g(x,t;1) = C_1(t)e^x + C_2(t)x e^x *$$

$$g(x,t) \Big|_{x=t} = 0 \rightarrow C_1(t)e^t + C_2(t)t e^t = 0$$

$$\frac{dg(x,t)}{dx} \Big|_{x=t} = 1 \rightarrow \frac{C_1(t)e^t + C_2(t)e^t + C_2(t)t e^t}{C_1(t) = -t e^{-t}} = 1$$

$$C_2(t) = e^{-t}$$

$$g(x, t) = -t e^{x-t} + x e^{x-t} = (x-t) e^{x-t}$$

$$R(x, t; 1) = \frac{1}{1} \frac{\frac{d^2}{dx^2} g(x, t)}{\frac{d^2}{dx^2}} = \frac{d^2}{dx^2} [(x-t) e^{x-t}]$$

$$R(x, t; 1) = (2+x-t) e^{x-t}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t) dt$$

$$u(x) = x + \int_0^x (2+x-t) e^{x-t} \cdot t dt$$

$$u(x) = x + e^x (2+x) \int_0^x t e^{-t} dt - e^x \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

?

$$u(x) = x e^x$$

Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi ile Çözüm

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \quad (5)$$

$$f(x) \rightarrow 0 \leq x \leq a$$

$$K(x,t) \rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq t \leq x \end{cases} \quad \text{olsun.}$$

$[0, a]$ da sürekli olan bir $f(x)$ fonk. ele alalım.
Belli bir (seçilen) $u_0(x)$ fonk. için

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt$$

Bu yolla bulunan $u_1(x)$ fonk. $[0, a]$ da sürekli olacaktır. Böyle devam ederek $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ gibi bir fonk. dizisi elde edilir.

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt$$

$f(x)$ ve $K(x,t)$ sürekli fonk. olduğundan $\{u_n(x)\}$ dizisinin $n \rightarrow \infty$ için (5) denkleminin $u(x)$ çözümüne yakınsadığını söyleyebiliriz. Özellikle $u_0(x)$ fonk. seçimi $\{u_n(x)\}$ dizisinin (5) denkleminin çözümüne yakınsama hızını artırır.

Örnek $u_0(x) \equiv 0$ seçerek $u(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt$
int. denkleminin çözümünü.

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u_{n-1}(t) dt$$

$$u_0(x) = 0$$

$$u_1(x) = 1 + \int_0^x \underbrace{u_0(t)}_0 dt = 1$$

$$u_2(x) = 1 + \int_0^x u_1(t) dt = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x$$

$$u_3(x) = 1 + \int_0^x u_2(t) dt = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$u_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$\vdots$

$$u_n(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sum \text{ yda}$$

$$u_n(x) \text{ fonksiyonu } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \text{ serisinin}$$

n. kısmi toplamıdır. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = e^x$
olacaktır. Böylece denklemin çözümü $u(x) = e^x$.

Örnekle

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x u(t) dt$$

int. denkleminin $u_0(x) = 1$ serisiyle çözülür.

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x 1 dt = \frac{x^2}{2}$$

$$u_2(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$u_3(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \left(-\frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} + t \right) dt$$

$$= \frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{3!} + x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} \right] + x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (-1)^{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} \right] + x \right\} = x$$

$$\boxed{u(x) = x}$$

Soru

Aynı soruyu a) $u_0(x) = x$

$$b) u_0(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

olarak çözülür

