

Linear Df. Denklemlerin Kuvvet serisiyle Çözümü

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

2. mertebeden lineer df. denklem

Tanım:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$y'' + \underbrace{\frac{a_1(x)}{a_0(x)}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{a_2(x)}{a_0(x)}}_{q(x)} y = 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Eğer bir x_0 noktası için

$a_0(x_0) \neq 0$ ise x_0 noktasına adi nokta denir.

$a_0(x_0) = 0$ ise x_0 // tekil nokta denir

Teorem: Eğer bir x_0 noktası

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}$$

df. denkleminin bir adi noktası ise bu x_0 noktasının uygun bir çevresinde df. denklemin

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

bir kuvvet serisi çözümü bulunur.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \rightarrow \text{Kuvvet serisi}$$

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ iki kuvvet serisi olsun. Eğer bu iki seri ortak bir aralıkta yakınsak ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$$

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = 0 \Rightarrow a_n = 0$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \Rightarrow a_n = b_n$$

Teorem: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ kuvvet serisi bir (a,b) aralığında yakınsak ise o takdirde

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 'dır. Ayrıca bu aralıkta $f(x)$ 'in türevleri aşağıdaki gibidir

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}}_{0 + a_1}$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}}_{0 + 0 + 2a_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

1) $x = x_0$ noktası etrafındaki kuvvet serisi çözümünün

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

2) Kuvvet serisi çözümü isteniyorsa ($x_0 = 0$)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Örnek $y' - 2y = 0$ bu diff. denklemin kuvvet serisi çözümünü bulalım.

($x=0$ noktası adi noktadır.)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_0 + 2a_1 x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^{n-1} \right) = 0 \quad 2a_0 + 2a_1 x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n a_n - 2a_{n-1}) x^{n-1} = 0$$

$$na_n - 2a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$a_n = \frac{2}{n} a_{n-1} \rightarrow \text{Rekürrens bağıntısı}$$

$$n=1 \quad a_1 = 2a_0$$

$$n=2 \quad a_2 = \frac{2}{2} a_1 = 2a_0$$

$$n=3 \quad a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2^2}{3} a_0$$

$$n=4 \quad a_4 = \frac{2}{4} a_3 = \frac{2^3}{4 \cdot 3} a_0$$

$$n=5 \quad a_5 = \frac{2}{5} a_4 = \frac{2^4}{5 \cdot 4 \cdot 3} a_0$$

$$n=6 \quad a_6 = \frac{2}{6} a_5 = \frac{2^5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} a_0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

$$y = a_0 + 2a_0 x + 2a_0 x^2 + \frac{2^2}{2} a_0 x^3 + \frac{2^3}{4 \cdot 3} a_0 x^4 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{2^2}{3} x^3 + \frac{2^3}{4 \cdot 3} x^4 + \dots \right) \rightarrow e^{2x}$$

$y' - 2y = 0$ dif. denkleminin
kurvet serisi çözünüdür.

$$y' - 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2 dx$$

$$\ln y - \ln C = 2x$$

$$\frac{y}{C} = e^{2x}$$

$$y = C e^{2x}$$

$$y = a_0 e^{2x}$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \dots$$

Örnek $y'' - xy' - y = 0$ dif- denklemini
kuvvet serisi yar. çözümler.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n = 0$$

$\uparrow_{n-2}$ $\uparrow_{n-2}$ $\nwarrow_{n-2}$ $\nwarrow_{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-2} x^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) a_n - (n-1) a_{n-2}] x^{n-2} = 0$$

$$n(n-1)a_n - (n-1)a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}$$

$$n=2 \quad a_2 = \frac{1}{2} a_0$$

$$n=3 \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1$$

$$n=4 \quad a_4 = \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{4 \cdot 2} a_0$$

$$n=5 \quad a_5 = \frac{1}{5} a_3 = \frac{1}{5 \cdot 3} a_1$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{3} a_1 x^3 + \frac{1}{4 \cdot 2} a_0 x^4 + \frac{1}{5 \cdot 3} a_1 x^5 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{105} + \dots \right)$$

$$y'' = xy' - y = 0 \quad \text{diff. d'ord. kurvet s'enssi}$$

kommutator.

$$\text{sölv} \quad [y' - 2xy = 0]$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

$$\ln y - \ln C = x^2$$

$$\frac{y}{C} = e^{x^2} \rightarrow y = C e^{x^2}$$

$$y = a_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right)$$