

İntegral Denklemlere Giriş

İntegral denklemler $u(x)$ bilinmeyen fonk. integral ifadesi içinde (ve dışında) bulunan denklemlerdir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t) u(t) dt$$

bilinmeyen fonk. $f(x)$ *parametre* λ *seçirler fonk.* $K(x,t)$ *bil. fonk.* $u(t)$

Bu denklemlerin birçok çeşidi vardır. Katagorize etmek için int. sınırlarına bağlı iki farklı temel int. denklemler vardır.

1) Fredholm int. denk.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt$$

$a, b \in \mathbb{R}$ $\left. \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ a \leq t \leq b \end{matrix} \right\} K(x,t)$ $a \leq x \leq b$ $f(x)$

$f(x) = 0$ ise bu denkleme

a) homojen Fredholm int. denklemini denir.

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

b) — $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$

1. cins Fredholm int. denk.

$$\sin x = x^2 + \int_0^1 e^{xt} u(t) dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

2. cins Fredholm int. denk.

2) $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$

Volterra int. denklemini x

a) $f(x) = 0 \Rightarrow u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$

Homojen Volterra int. denk.

$$b) \phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt$$

1. ans Volterra int. denken

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt$$

2. ans Volterra int. denken:

Lineark. ist. $n \in \mathbb{Z}^+$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) [u(t)]^n dt$$

($n=1$ ist Linear int. denk.
 $n \neq 1$ ist Linearisierter int. denk.)

$$[u(x)]^n = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt$$

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t) u(t) dt$$

n. member integro-dif. denken

Fredholm integro dif. denklemleri

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt$$

$$u^{(k)}(x) = \frac{d^k u}{dx^k}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{u''(x) + u'(x)} &= x - \sin x - \int_0^{\pi/2} x u(t) dt \\ u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{BDP}$$

Volterra integro. dif denklemleri

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt$$

$$u^{(k)}(x) = \frac{d^k u}{dx^k}$$

$$u'(x) = 1 + \int_0^x x u(t) dt, \quad u(0) = 0$$

Tekil int. denklemler:

Sınırların birinde ya da her iki sınırda da sonsuz olan int. denk. bu sınıfa girerler

Ayrıca sınırlarının sonlu olması durumunda $K(x,t)$ nin tanımsız olması veya bazı değerlerinde tanımsız olması da bu sınıfa dahildir.

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{x-t} u(t) dt$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} u(t) dt$$

Düşey düzlemde verilmiş bir Segnsi boyunca A noktasından başlayarak P noktasına gelmesi istenen bir kütlenin hareket denklemini Abel tarafından

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

olarak hesaplanmıştır.

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt \quad 0 < \alpha < 1$$

Abel integral denklemi

Çözüm Kavramı:

Br Mt. denklemin çözüm demek.
Mt. denklemini sağlayan $u(x)$ fonk. nın
bulunması demektir.

$$u(x) = \underbrace{\varphi(x)}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{L}(x,t) u(t) dt$$

$$\underbrace{\varphi(x)} = f(x) + \lambda \underbrace{\int_a^b \mathcal{L}(x,t) \varphi(t) dt}_{\varphi(x)}$$

Ümek $\varphi(x) = \frac{3x}{2}$ nih

$$u(x) = x + \int_0^1 x t u(t) dt \quad \text{nm.bnr}$$

çözümü old. gösteriniz.

$$\left(\frac{3x}{2}\right) = x + \int_0^1 x t \cdot \frac{3t}{2} dt$$

$$= x + \frac{3x}{2} \int_0^1 t^2 dt = x + \frac{3x}{2} \left(\frac{t^3}{3}\right)_0^1$$

$$= x + \frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{3} = x + \frac{x}{2} = \left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt$$

$b \rightarrow x$
 $a \rightarrow x$

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt$$