

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t) dt$$

$$u(x) = f(x) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_{(n)}(x,t)f(t) dt}_{\text{Neumann Serisi}}$$

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

Neumann Serisi için Yakınsaklık Analizinin Geri Etilmesi

$$|\lambda| < \left[\int_a^b \int_a^b \{K(x,t)\}^2 dx dt \right]^{-1/2} \quad K(x,t)$$

İntegral için O.D.T. göre

$$\left(\int_a^b \int_a^b [K(x,t)]^2 dx dt \right)^{1/2} \leq M(b-a) \text{ yazılabileceğinden}$$

bu, $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ 'de yerine konulursa

ezitirlik daha da kuvvetlenir.

Örnek $u(x) = x + \lambda \int_0^1 xt u(t) dt$ mt. denklemin yak. avd. gini gerçekleştir.

$|\lambda| < 1$ Bu koşul altında Neumann Serisi (dizisi) yakınsaktır.

$$\int_0^1 \int_0^1 (K(x,t))^2 dx dt = \int_0^1 \int_0^1 x^2 t^2 dx dt = \frac{1}{9}$$

$$|\lambda| < \left[\int_0^1 \int_0^1 [K(x,t)]^2 dx dt \right]^{-1/2} = \left(\frac{1}{9} \right)^{-1/2} = 3$$

$$|\lambda| < 3 \Leftrightarrow -3 < \lambda < 3$$

Ardışık Yaklaşdırma Yöntemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

İlk yaklaşımlar için

$$u_0(x) = \underbrace{f(x)}_{\phi_0(x)} \text{ alalım.}$$

$$u_0(x) = f(x) = \phi_0(x)$$

$$u_1(x) = \underbrace{f(x)} + \lambda \underbrace{\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt}_{\phi_1(x)}$$

$$\phi_1(x) = \int_a^b K(x,t)u_0(t)dt = \int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

$$\phi_1(x) = \int_a^b K(x,t)\phi_0(t)dt$$

$$u_0(x) = \phi_0(x)$$

$$u_1(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x)$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_1(t)dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) [\phi_0(t) + \lambda \phi_1(t)] dt$$

$$= f(x) + \lambda \underbrace{\int_a^b K(x,t)\phi_0(t)dt}_{\phi_1(x)} + \lambda^2 \underbrace{\int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dt}_{\phi_2(x)}$$

$$\phi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dt$$

$$u_2(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x)$$

$$u_n(x) = \underbrace{\phi_0(x)} + \lambda \underbrace{\phi_1(x)} + \lambda^2 \underbrace{\phi_2(x)} + \dots + \lambda^n \underbrace{\phi_n(x)}$$

Barlancısı şart

$$\phi_0(x) = f(x)$$

Sonrakisi şart

$$\phi_n(x) = \int_a^b K(x,t) \phi_{n-1}(t) dt$$

Relans bağıntısı

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots$$

(*)
Bunun yakınsaklığı
bulunmalıdır.

$f(x)$ $[a,b]$ sürekli, sınırlıdır. $|f(x)| < A$

$K(x,t)$ $a \leq x \leq b$ $a \leq t \leq b$ sürekli, sınırlı $|K(x,t)| < M$

$$\phi_0(x) = f(x)$$

$$\phi_n(x) = \int_a^b K(x,t) \phi_{n-1}(t) dt \quad (n \geq 1)$$

$$\phi_0(x) = f(x) \Rightarrow |\phi_0(x)| < A$$

$$\phi_1(x) = \int_a^b K(x,t) \phi_0(t) dt \Rightarrow |\phi_1(x)| < M \cdot A (b-a)$$

$$|\phi_2(x)| < M^2 A \cdot (b-a)^2$$

$$|\phi_n(x)| < M^n A (b-a)^n$$

$$A + |\lambda| M A (b-a) + |\lambda|^2 M^2 A (b-a)^2 + \dots + |\lambda|^n M^n A (b-a)^n + \dots$$

$$A \left(1 + |\lambda| M (b-a) + |\lambda|^2 M^2 (b-a)^2 + \dots \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{1 \cdot \left[|\lambda| M (b-a) \right]^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

geometrik
seri

$$|\lambda| M (b-a) < 1 \quad \text{Yakınsaklık
serisi}$$

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

Örnek

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 x e^{-t} u(t) dt \quad \text{int. denklemini}$$

A. Y. Y. ile çözülmüş.

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = \int_0^1 K(x,t) \phi_0(t) dt = \int_0^1 x e^{-t} \cdot 1 dt = x \left(-e^{-t} \right)_0^1 = x \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

$$\phi_2(x) = \int_0^1 K(x,t) \phi_1(t) dt = \int_0^1 x e^{-t} t \left(1 - \frac{1}{e} \right) dt = x \left(1 - \frac{1}{e} \right) \left(1 - \frac{2}{e} \right)$$

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= \int_0^1 K(x,t) \phi_2(t) dt = \int_0^1 x e^{-t} t \left(1 - \frac{1}{e} \right) \left(1 - \frac{2}{e} \right) dt \\ &= x \left(1 - \frac{1}{e} \right) \left(1 - \frac{2}{e} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\phi_n(x) = x \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left(1 - \frac{2}{e}\right)^{n-1}$$

$$u(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots$$

$$u(x) = 1 + \lambda x \left(1 - \frac{1}{e}\right) + \lambda^2 x \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left(1 - \frac{2}{e}\right) + \lambda^3 x \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left(1 - \frac{2}{e}\right)^2 + \dots$$

$$u(x) = 1 + \lambda x \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left[1 + \lambda \left(1 - \frac{2}{e}\right) + \lambda^2 \left(1 - \frac{2}{e}\right)^2 + \dots \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \left(1 - \frac{2}{e}\right) \right]^{n-1} = \frac{1}{1 - \lambda \left(1 - \frac{2}{e}\right)}$$

$$\left| \lambda \left(1 - \frac{2}{e}\right) \right| < 1$$

$$|\lambda| < \frac{1}{1 - \frac{2}{e}}$$

$$u(x) = 1 + \lambda x \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{1 - \lambda \left(1 - \frac{2}{e}\right)}$$

Solve $\Rightarrow$ 1) $u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 x^2 t^2 u(t) dt$ $u(x) = 1 + \frac{\lambda x^2}{3} \cdot \frac{5}{5 - \lambda}$

2) $u(x) = \sin x - \frac{x}{4} + \lambda \int_0^{\pi/2} x t u(t) dt$

$$u(x) = \sin x - \frac{x}{4} + \lambda \left(1 - \frac{\pi^3}{96}\right) x \left[\frac{1}{1 - \lambda \frac{\pi^3}{24}} \right]$$

Çözümün Tekliği Teoremi:

- λ sabit ve $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$
- $f(x) \neq 0$ ve $[a, b]$ 'de sürekli
- $|K(x, t)| < M$ ve $K(x, t) \neq 0$

koşulları altında

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \text{ int. denkleminin}$$

bir ve yalnız bir çözümü vardır. Bu çözüm
düzenli ve mutlak yakınsak olan

$$u(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots$$

serisi ile belirlenir.

İspat: $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ int. denklemin iki farklı
çözümü olsun.

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u_1(t) dt$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u_2(t) dt \text{ yazılabilir.}$$

$$\underbrace{u_1(x) - u_2(x)}_{v(x)} = \lambda \int_a^b K(x, t) [u_1(t) - u_2(t)] dt \text{ bulunur}$$

$$v(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) v(t) dt \text{ olur.}$$

$u_1(x) \neq u_2(x)$ olduğundan $v(x) \neq 0$ 'dır.

Eşitliğin her iki tarafının mutlak değerlerinin
karemini alarak x 'e göre a dan b ye integre edelim:

$$|v(x)|^2 \leq |\lambda|^2 \int_a^b (K(x,t))^2 \int_a^b |v(t)|^2 dt \quad \text{* ispat ağırlıkta}$$

(Schwarz Eşitsizliği)

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 M^2 (b-a)^2 \int_a^b |v(t)|^2 dt$$

$$[1 - |\lambda|^2 M^2 (b-a)^2] \int_a^b |v(x)|^2 dx \leq 0$$

a) koşulunda $|\lambda| M (b-a) < 1$ olduğundan

$1 - |\lambda|^2 M^2 (b-a)^2 > 0$ olur. ve o halde

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx \leq 0 \text{ olmalıdır. Ancak bu ifade}$$

negatif olamaz; Riemann int. teoremlerinden birine göre $a < b$ ve integrant pozitif ise integralin değeri pozitif tir. Olsa olsa sıfıra eşit olur, yani

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0 \Rightarrow u_1(x) - u_2(x) = v(x) = 0$$

$$\Rightarrow u_1(x) \equiv u_2(x)$$

$$\int_a^b (f(x)g(x))^2 dx \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$$

input

$$|V(x)|^2 = \left| \lambda \int_a^b K(x,t) v(t) dt \right|^2$$

$$\int_a^b |V(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 \left[\int_a^b (K(x,t))^2 dt \int_a^b (v(t))^2 dt \right] dx$$
$$< |\lambda|^2 M^2 (b-a)^2 \int_a^b (v(t))^2 dt$$