I

24/03/2021

FİNANS MATEMATİĞİNE GİRİŞ

Anlık faiz ve iskonto oranları: Şimdiye kadar faiz ve iskontonun belli zaman dilimlerindeki oranları ile ilgilenildi. Ancak çok küçük zaman dilimlerine ilişkin faiz ve iskonto oranlarıda incelenebilir. Bu oranlar, anlık faiz oranları olarak adlandırılır. Ve birikimli değerin değişim hızı kavramı yardımıyla

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{d}{dt}\ln[A(t)] = \frac{d}{dt}\ln[a(t)]$$

eşitliği ile ifade edilir. Anlık faiz oranına göre 1 birimin t süre sonraki birikimli değerinin bulunması için yukarıdaki eşitlikte t yerine r koyarak her iki yanın $[0,t]$ aralığında integrali alındığında

$$\int_0^t \delta_r\,dr = \int_0^t \frac{d}{dr}\ln[a(r)]\,dr = \ln[a(t)] - \ln[a(0)] = \ln\frac{a(t)}{a(0)}$$

Eşitliğin her iki tarafı logaritma fonksiyonunun tersi olan üstel fonksiyon ile birleştirilirse

$$\exp\left[\int_0^t \delta_r\,dr\right] = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik anlık faiz oranına göre birikimli değerin bulunmasında kullanılır.

<u>Örnek</u>: Yatırım dönemi boyunca anlık faiz oranı 0,07 olarak verildiğine göre 10.000 TL'nin 10. yıl sonundaki birikimli değerini bulunuz.

$$\text{Birikimli Değer} = 10.000e^{0.07 \cdot 10} = 10.000\,e^{0.7} = 20137.53 \text{ TL}$$

Birikim fonksiyonunun sabit basit faiz oranı ile hesaplanması durumunda anlık faiz oranı

$$\delta_t = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)} = \frac{\frac{d}{dt}(1+it)}{1+it} = \frac{i}{1+it} \qquad t \geq 0$$ şeklinde elde edilir.

2

Sabit basit iskonto oranı kullanıldığında anlık iskonto oranı ise

$$\delta_t = \frac{\frac{d}{dt}\bar{a}^{-1}(t)}{\bar{a}^{-1}(t)} = \frac{\frac{d}{dt}(1-dt)}{1-dt} = \frac{+d}{1-dt} \quad 0 \le t < \frac{1}{d}.$$

olarak bulunur. Anlık faiz ve iskonto oranı, nominal faiz oranı ve iskonto oranlarının tanımını kullanarak bir yıl içinde faiz dönüşüm dönemi sayısının sonsuza gitmesi durumunda

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta$$

Anlık faiz ve anlık iskonto oranı birbirine eşittir.

<u>örnek</u>

$\delta_t = \frac{0.01}{1+0.01t}$ olarak verildiğine göre $t=2$ anında yapılan 1 birimlik yatırımın $t=n$ anındaki birikimli değerini bulunuz.

<u>çözüm</u>: Bu örnekte anlık faiz oranı yatırım yapılan zamana göre değişmektedir. Bu nedenle yatırımın yapıldığı an ile vade sonundaki değişim önemli olmaktadır.

$$\exp\left[\int_2^n \frac{0.01}{1+0.01t}\,dt\right] = \frac{a(n)}{a(2)} = \frac{1+0.01n}{1+0.01.2} = \frac{1+0.01n}{1+0.02}$$

$$= \frac{1+0.01n}{1.02}$$

<u>Faiz ve iskonto oranları arasındaki ilişki</u>

$t=0$ anında yatırılan 1 birimin t anındaki birikimli değeri; bileşik faiz, nominal faiz, bileşik iskonto, nominal iskonto ve sabit anlık faiz oranları kullanarak

$$(1+i)^t = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} = (1-d)^{-1} = \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mt} = e^{\delta t}$$

elde edilir.

3

ve t anında yatırılan 1 birimin $t=0$ anındaki bugünkü değeri ise bileşik faiz, nominal faiz, bileşik iskonto, nominal iskonto ve sabit anlık faiz oranları kullanılarak sırasıyla

$$(1+i)^{-t} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mt} = (1-d)^{t} = \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt} = e^{-\delta t}$$

olarak ifade edilir.

j basit faiz oranı ve d basit iskonto oranı için $t=0$ anında yatırılan 1 birimin t anındaki birikimli değeri

$$a(t) = 1+jt = (1-dt)^{-1}$$

eşitlikleri ile elde edilir. j basit faiz oranı ve d basit iskonto oranı için t anında yatırılan 1 birimin $t=0$ anındaki bugünkü değeri ise

$$a^{-1}(t) = (1+jt)^{-1} = 1-dt$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

<u>Örnek</u>: Bir yatırımcının yıllık efektif %10 basit faiz oranı ile üç yıl sonra 1000 TL'sinin olması için başlangıçta ne kadar yatırmalıdır?

$$B.D = 1000\,(1+0.10.3)^{-1} = 769.23\ TL$$

<u>Örnek</u>: Bir yatırımcının, yıllık efektif %10 bileşik faiz oranı ile 3 yıl sonra 1000 TL'ye sahip olabilmesi için başlangıçta ne kadar yatırması gerekir?

$$BD = 1000\,(1+0.10)^{-3} = 751.31\ TL$$

4

Bugünkü değer (Peşin değer)

Bugünkü değer, gelecekte yapılacak bir ödemenin verilen faiz veya iskonto oranına göre bulunulan andaki değerini gösterir.

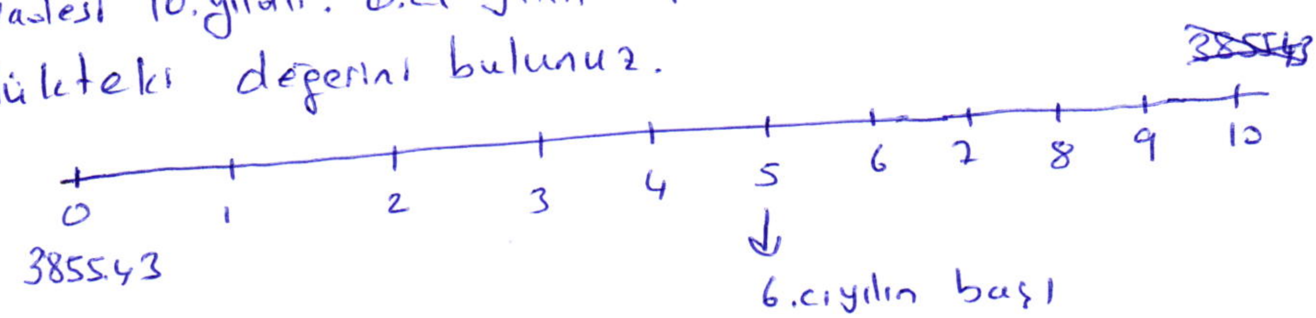
Bugünkü değer, genel olarak iskonto faktörü (V) ile ifade edilir. Ve t. yıl sonunda yapılan 1 birimlik yatırımın bugünkü değeri, V^t şeklinde tanımlanır.

Örnek Yıllık efektif %10 faiz oranı ile X TL tutarındaki yatırımın vadesi 10 yıldır. 10. yıl sonunda bu yatırımın değeri 10.000 TL olduğuna göre X'i değerini bulunuz.

$$X = 10.000\,V^{10} = 10000\,(1+0{,}10)^{-10} = 3855.43\text{ TL}$$

Yürürlükteki değer: Bir yatırımın vade içindeki herhangi bir andaki değeri yürürlükteki değer olarak adlandırılır. Yürürlükteki değer; başlangıçtaki yatırım tutarının istenilen zaman noktasındaki birikimli değeri ya da vade sonundaki birikimli değerinin istenilen zaman noktasındaki bugünkü değeri yardımıyla bulunur.

Örnek! Yıllık efektif %10 faiz oranı ile 3855.43 TL'nin vadesi 10. yıldır. 6.cı yılın başındaki bu yatırımın yürürlükteki değerini bulunuz.



$$3855.43\,(1+0.10)^5 = 6209.21\text{ TL}$$

5 **Birikimli Değer** Belli bir tarihte yapılan ödemenin bu tarihten sonraki herhangi bir zamandaki değerini gösterir.

Örnek: Yıllık efektif %10 faiz oranı ile 3.855,43 TL'nin vadesi 10 yıldır. 10'cu yılın sonundaki birikimli değerini bulunuz.

$$3855.43\,(1+0.10)^{10} = 10{,}000 \text{ TL}$$

Örnek

Birinci yıl için efektif faiz oranı %6 ikinci ve üçüncü yıl için yıllık efektif iskonto oranı %7, dördüncü yıl için yıllık nominal faiz oranı %12 ve 6 aylığa dönüştürülebilir. Yıllık nominal iskonto 5. yıl için 6 aylığa dönüştürülebilir. Yıllık efektif oranı %14 ve 5. yıldan sonraki dönemler için. Yıllık efektif faiz oranı %12 olarak verilmiştir. Bu verilere göre 11.ci yılın sonundaki değeri 10,000 TL olan yatırımın değeri ikinci yılın başındaki bugünkü değerini bulunuz.

$$\underset{\text{2ci yıl başındaki değer}}{X}\underbrace{(1-0.07)^{-2}}_{\text{3. yıl sonundaki birikimli değer.}}\underbrace{\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2}}_{\text{4.cü yıl sonu birikimli değer.}}\underbrace{\left(1\mp\frac{0.14}{2}\right)^{-2}}_{\text{5. yıl sonu birikimli değer.}}(1+0.12)^{6} = 10.000$$

$$X = 3372.96 \text{ TL}$$

Örnek Aynı faiz oranları ile birinci yılın başında yatırılan 5000 TL'nin 6.cı yılın sonundaki birikimli değeri nedir?

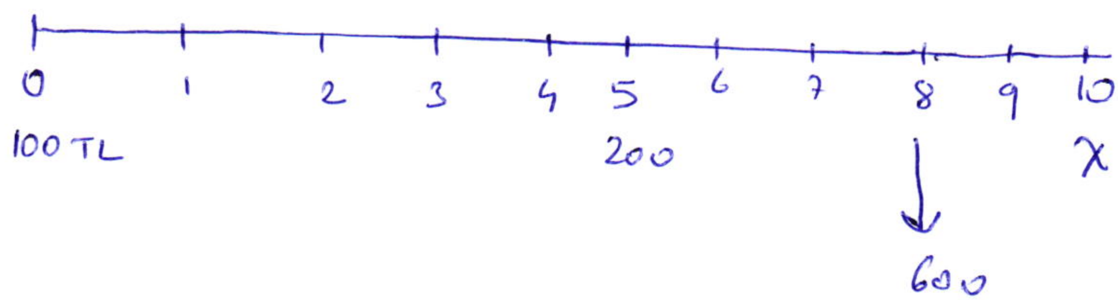
$$5000\underbrace{(1+0.06)^{1}}_{\text{1. yıl sonu}}\underbrace{(1-0.07)^{-2}}_{\text{3.cü yıl sonu}}\underbrace{\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2}}_{\text{4.cü yıl sonu.}}\underbrace{\left(1-\frac{0.14}{2}\right)^{-2}}_{\text{5.ci yıl sonu}}(1+0.12)^{1}$$

$$= 8916.08 \text{ TL}$$

6 İki nakit akışının bugünkü değerlerinin eşitliği

İki farklı nakit akışı için dengenin oluştuğu zaman noktası bulunmak istenebilir. Bunu elde etmek için genel olarak iskonto farkları kullanılmak istenebilir. İki nakit akışının bugünkü değerlerinin eşit olduğu tarihe karşılaştırma tarihi adı verilir.

Örnek Bir yatırımcı 8.ci yılın sonunda 600 TL'ye sahip olabilmek için başlangıç anında 100 TL, 5.ci yılın sonunda 200 TL ve 10. yılın sonunda bilinmeyen tutarda bir ödeme yapacaktır. AHI aylığa dönüştürülebilir. Yıllık nominal faiz oranı %8 olduğuna göre bilinmeyen bu ödeme tutarını bulunuz.



$$100\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{16}+200\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{6}+X\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{-4}=600$$

$$100(1+0.04)^{16}+200(1+0.04)^{6}+X(1+0.04)^{-4}=600$$

$$100(1.04)^{16}+200(1.04)^{6}+X(1.04)^{-4}=600$$

$$187.298+253.06+0.854X=600$$

$$0.854X=159.642$$

$$X=\frac{159.642}{0.854}$$

$$\boxed{X=186.93}$$

7

Bilinmeyen ödeme zamanı

Örnek 1000 TL'nin altı aylığa dönüştürülebilir yıllık nominal %6 faiz oranı ile 1500 TL olabilmesi için gereken vade uzunluğunu bulunuz.

$$1000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2n} = 1500$$

$$(1+0.03)^{2n} = 1.5$$

$$2n \log(1.03) = \log 1.5$$

$$2n = \frac{\log 1.5}{\log 1.03} = \frac{0.17609}{0.0128} = 13.754 \cong 14$$

$$2n = 14 \quad n = 7 \text{ yıl.}$$

Bilinmeyen faiz oranı

1000 TL'nin 6 yıl sonundaki değeri 1600 TL olması için 3 aylığa dönüştürülebilir. Yıllık nominal faiz oranını bulun.

$$1000\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{24} = 1600$$

$$\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{24} = 1.6$$

$$1+\frac{i^{(4)}}{4} = (1.6)^{1/24}$$

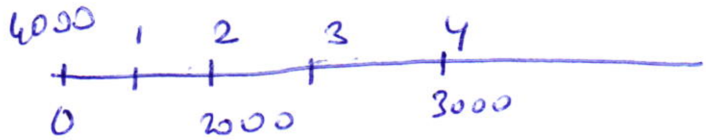
$$\frac{i^{(4)}}{4} = (1.6)^{1/24} - 1 = 0.0197$$

$$i^{(4)} = 4\left((1.6)^{1/24} - 1\right)$$

$$\boxed{i^{(4)} = 0.0791}$$

Örnek

8 İkinci yılın sonunda yatırılan 2000TL'nin ve dördüncü yılın sonunda yatırılan 3000TL'nin toplamının bugünkü değerinin 4000TL'ye eşit olabilmesi için yıllık efektif faiz oranını bulunuz.



$$3000(1+i)^{-4} + 2000(1+i)^{-2} = 4000$$

$$(1+i)^{-2} = x$$

$$\cancel{3000}\, x^2 + \cancel{2000}\, x = \cancel{4000}$$

$$3x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$a = 3 \quad b = 2 \quad c = -4 \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-4) \cdot 3$$

$$\Delta = 52$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{52}}{6} = (1+i)^{-2} = 0.868$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{52}}{6} \ne (1+i)^{-2} \text{ olamaz}$$

$$\frac{1}{(1+i)^2} = 0.868$$

$$\frac{1}{1+i} = 0.931$$

$$\frac{1}{0.931} = 1+i$$

$$1.074 = 1+i$$

$$i = 0.074$$

9

Değişken faiz oranı

Birinci dönem için efektif faiz oranı i_1, ikinci dönem için efektif faiz oranı i_2 ..., ve n.ci dönem için efektif faiz oranı i_n olarak verilsin. Bu durumda t=0 için yapılacak 1 birimin yatırımın n.ci yıl sonundaki birikimli değeri

$$a(t)=(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_t)=\prod_{k=1}^{t}(1+i_k)$$ olarak

ifade edilir.

Örnek ilk 4 yıl için efektif faiz oranı %3, ikinci 4 yıl için efektif faiz oranı %3.5, üçüncü 4 yıl için efektif faiz oranı %5 ise 2000TL'nin 12 yıl sonraki birikimli değerini bulunuz.

$$\text{Bir değer}= 2000\underbrace{(1+0.03)}_{1.03}^4(1.035)^4(1.05)^4$$

$$=3139.77 \text{ olur.}$$