1

17/03/2021

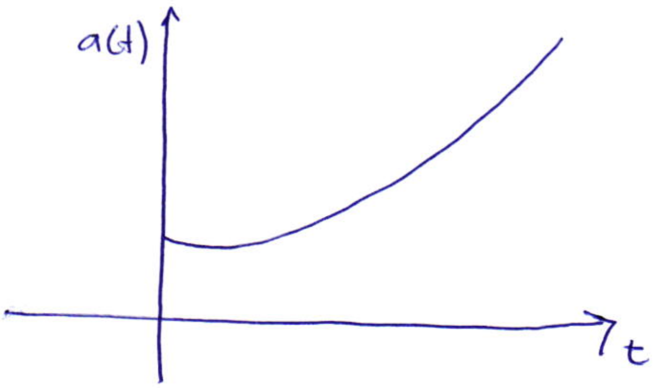
FİNANS MATEMATİĞİNE GİRİŞ

Basit Faizde dönem içinde elde edilen faiz geliri yeniden faizlendirilmemektedir. Örneğin 100TL değerindeki bir yatırımın yıllık %10 basit faiz oranı üzerinden iki yıl sonraki birikimli değeri nedir? Sorusu ele alınsın. %10 basit faiz oranıyla yatırımcı iki yılın herbirinin sonunda 10 TL Faiz alacaktır. 100TL'nin iki yılın sonundaki birikimli değeri basit faize göre 100+10+10=120 TL olacaktır. Bileşik faiz kullanıldığındaise, ikinci yılın başında yatırıma yönlendirilecek tutar 110 TL olduğundan, ikinci yılın sonunda 10TL tutarındaki faiz gelirinin faizi dan 1TL de toplama eklendiğinde ikinci yılın sonundaki birikimli değeri 121TL olacaktır.

Bileşik Faizde, bir dönemin sonunda elde edilen faiz de yeniden faizlendirilmekte diğer bir değişle elde edilen faiz gelirinde yatırıma yönlendirilmektedir. Herhangi bir yatırımın bileşik faiz kullanılarak vade sonundaki birikimli değeri, Ana para ve dönem boyunca elde edilen faiz tutarlarının toplamına eşittir. 1 birimlik yatırımın birinci yılın sonunda $(1+i)$ değerine ulaşır. ikinci yılın başında $(1+i)$ birim i faiz oranıyla yeniden değerlendirildiğinde ikinci yılın sonunda $i(1+i)$ birim kadar faiz kazandırır. Dolayısıyla ikinci yılın sonundaki birikimli değeri $1+i+i(1+i)=(1+i)^2$ olur. üçüncü yılın başında i faiz oranı ile yeniden değerlendirilen $(1+i)^2$ değeri, üçüncü yılın sonunda $i(1+i)^2$ birim kadar faiz kazandırır. Ve üçüncü yılın sonundaki birikimli değer $(1+i)^2+i(1+i)^2=(1+i)^3$ olur. Benzer işlem Belirli bir t yılının sonuna kadar sürdürüldüğünde t dönem sonundaki birikimli değer,

$$a(t)=(1+i)^t \quad t\geq 0 \quad \text{olur.}$$

$\boxed{2}$ $a(t)=(1+i)^t$ grafiği aşağıdadır.



i_n n.ci dönemdeki faiz oranı olarak tanımlandığında

$$i_n = \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+i)^n-(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = \frac{\cancel{(1+i)^{n-1}}(1+i-1)}{\cancel{(1+i)^{n-1}}} = i$$

olarak ifade edilir. Eşitlikten de görüldüğü üzere, basit faiz oranından farklı olarak efektif faiz oranı dönem sayısından bağımsız olup tüm dönemler için aynı değeri alır.

<u>Örnek</u>

$t=1$ anında bir fona yatırılan 1000 TL nin %10 bileşik faiz oranı ile üç yıl sonraki birikimli değerini bulunuz.

Çözüm

$t=1$ anında yatırılan 1000 TL'nin bileşik faiz oranı ile üç yıl sonraki birikimli değeri

$$1000\,(1+0.10)^3 = 1.331 \text{ TL}$$

<u>Nominal Faiz</u>

Efektif faiz terimi, faiz ödemesinin dönem başında veya dönem sonunda olmak üzere bir kez yapıldığı durum için tanımlandığını hatırlayalım. Bu kesimde ise faiz ödemesinin dönem içinde birden çok kere yapılması durumu ele alınacaktır. Bu durumu incelerken ele alınan faiz nominal faiz olarak adlandırılacaktır.

3

Ayrıca nominal faiz oranının tanımlanması ve bu nominal oranlara eşdeğer efektif faizin bulunması için genel bir yöntem geliştirilecektir.

Bir yılda m kez faiz ödemesi yapılıyorsa yıllık nominal faiz oranı $i^{(m)}$ ile gösterilir. Burada $m > 1$ olan tam sayıdır. $i^{(m)}$ yıllık nominal faiz oranı, bir yılda m kez ödeme yapıldığını ve her bir dönemdeki efektif faiz oranının $i^{(m)}/m$ olduğunu gösterir. Örneğin; üç aylığa dönüştürülebilir yıllık nominal faiz oranı %24 ise her çeyrek yıl için (üç ay) için efektif faiz oranı %6 olur. Bir yıllık dönem sonunda efektif ve nominal faiz oranları üzerinden elde edilecek birikimli değerlerin eşdeğerliğinden

$$1+i = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^m$$

yazılabilir. Eşitliğin sol tarafı 1 birimlik bir yatırımın i efektif faiz oranına göre bir yıllık dönem sonundaki birikimli değerini, sağ tarafı ise yine 1 yıllık dönem üzerinden nominal faiz oranına göre birikimli değerini verir. Bu eşitlik yeniden düzenlendiğinde

$$i = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^m - 1$$

ve

$$i^{(m)} = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$$

olarak ifade edilir.

4

Örnek

10.000 TL'nin altı aylığa dönüştürülebilir. Yıllık nominal %10 faiz oranına göre üç yıl sonraki birikimli değerini bulunuz.

Çözüm

Altı aylığa dönüştürülebilir. Yıllık nominal faiz oranı %10 verildiğine göre altı aylık dönem için efektif faiz oranı

$$i^2 = 0.10 \Rightarrow \frac{i^{(2)}}{2} = 0.05$$

Altı aylık efektif faiz oranı $= 0.05$

Bir yılda iki tane 6 aylık dönem bulunmaktadır. Bu durumda 3 yıllık yatırım döneminde altı tane 6 aylık dönem vardır. Bu durumda 10.000 TL'nin altı aylık %5 faiz oranı ile altı tane altı aylık dönem sonundaki birikimli değeri

$$= 10.000(1+0.05)^6 = 13400,96 \text{ TL}$$

Bulunur.

İskontonun ölçümü

Ödünç verilen başlangıç tutarından dönem içinde gerçekleşecek faiz gelirinin peşin olarak ödünç verilen tutardan düşürüldükten sonra geri kalanın borç olarak verilmesi işlemine iskonto denir. Örneğin Ali bir bankadan yıllık %10 faiz oranıyla bir yıl sonra ödemek üzere 1000 TL borç alırsa bir yılın sonunda bir yılın sonunda 1000 TL ana para ve 100 TL faiz olmak üzere 1100 TL ödeme yapar. Eğer Ali bankadan yıllık %10 iskonto oranı ile bir yıl sonra ödemek üzere 1000 TL borç alırsa bankadan 900 TL alır. Ve Ali borcunu kapatmak üzere bir yıl sonra bankaya 1000 TL öder.

5

örnekten görüldüğü gibi %10 faiz oranı ile %10 iskonto oranı aynı olmadığı açıktır. Yukarıda açıklanan her iki durumdada Ali 100 TL faiz ödemektedir. İlk örnekte Ali dönem içinde kullandığı 1000 Lira için faizi dönem sonunda öderken ikinci örnekte yıl içinde kullandığı 100TL'nin faizini dönem başında ödemektedir. Bu örnekten de yararlanarak $^{a}d_{\gg}$ ile gösterilen efektif iskonto oranı ile dönem boyunca kazanılan faiz tutarının dönem sonunda ulaşılan tutara oranı olarak tanımlanır.

Faiz ve iskonto kavramları arasındaki temel fark faizin dönem başındaki değerin sağlanması için dönem sonunda ödenmesi ve iskontonun dönem sonundaki değerin sağlanması için dönem başında ödenmesidir. Dönem sonunda 1 birim alabilmek için dönem başında $(1+i)^{-1}$ kadar yatırım yatırım yapılmalıdır. Bu tutar $V=(1+i)^{-1}$ ile gösterilir. V terimine iskonto faktörü denir. Ve bir yatırımın dönem başındaki değerinin dönem sonundaki değerine oranını verir. Bu tanımı bir dönem dışındaki diğer dönemler içinde tanımlamakta mümkündür. Örneğin kaç birimlik yatırım tutarı t dönem (vade) sonunda 1 birime ulaşır? Bu sorunun cevabı birikim fonksiyonunun tersi olan $a^{-1}(t)$ ile açıklanabilir. Ve iskonto fonksiyonu olarak adlandırılır. Böylece $t \geq 0$ için iskonto fonksiyonu kullanılarak basit faiz ve bileşik faiz oranları için iskonto fonksiyonu sırasıyla $a^{-1}(t)=\frac{1}{1+it}$ ve $a^{-1}(t)=\frac{1}{(1+i)^t}$

şeklinde gösterilir. Tersi belirtilmediği sürece faiz oranı için bileşik faizin kullanılması gerekir.

Sonuç olarak iskonto ve birikim fonksiyonları çarpmaya göre birbirinin tersi fonksiyonlardır. $(1+i)^t$, 1 birimlik yatırımın t. dönem sonundaki birikimli değerini ve v^t ise, t. dönem sonunda ödenecek bir birimin bugünkü değerini (ya da) peşin değerini gösterir.

Efektif İskonto

Dönem başı faiz ödemelerinin bir ölçümü olan ve d ile gösterilen efektif iskonto oranı tanımlanacaktır.

n.ci dönem için efektif iskonto oranı d_n

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)} \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır.

Burada I_n n.ci dönem için iskonto tutarı olarak adlandırılır.

Genel olarak dönemden döneme değişir. Bileşik faiz oranı üzerinden işlem yapıldığında efektif faiz oranının değişmediği gösterilmişti. Aynı durum efektif iskonto oranı içinde geçerlidir.

Daha önce de ifade edildiği gibi %10 faiz oranı ile %10 iskonto oranı aynı değildir. Ancak iki oran arasında bir ilişki vardır. Bu ilişki aşağıdaki gibi bir eşdeğerlik tanımı yardımıyla ifade edilebilir. Bir kişi d iskonto oranı ile 1 TL borç aldığında başlangıç değeri 1-d ve faiz tutarı d dir. Faiz tanımını kullanarak borç alma işlemi için efektif faiz oranı

$$i = \frac{d}{1-d}$$

olur. Cebirsel işlemler yapılarak

$$d = \frac{i}{1+i}$$ elde edilir.

7

Sonuç olarak 1 birimlik borç alınırsa dönem sonunda 1+i birim yada dönem başında (1-d) birimlik borç alınırsa dönem sonunda 1 birim ödenir.

<u>Basit iskonto:</u> $a^{-1}(t) = 1-dt$ iskonto fonksiyonu olup $0 \le t \le \frac{1}{d}$ şeklinde ifade edilir. Basit faiz oranı ile basit iskonto oranı arasında benzer ve birbirinin tam karşıtı olan özellikler vardır.

1) Sabit basit faiz oranı, yatırım dönemi arttıkça efektif faiz oranının azalmasını gerektirir. Basit iskonto oranı için tersi bir durum söz konusudur.

2) Basit ve bileşik iskonto oranları bir dönem için aynı sonuçları verirler. Daha uzun dönemler için, basit iskonto, bileşik iskontoya göre daha küçük bugünkü değer oluşmasına neden olur.

<u>örnek</u> Yıllık %10 basit iskonto oranıyla üç yıl sonra 2000 TL'ye sahip olmak için şu an yatırılması gereken tutarı bulunuz

$$P = A(1-dt)$$

$$P = 2000(1-0{,}1 \cdot 3) = 1400 \text{ TL}$$

<u>örnek:</u> Yıllık %10 bileşik iskonto oranı ile üç yıl sonunda 2000 TL nin biriktirilebilmesi için şu an yatırılması gereken tutarı bulunuz.

$$P = A(1-d)^t = 2000(1-0.10)^3 = 1458 \text{ TL}$$

8

Nominal iskonto: Bir dönemde m kez kullanılan nominal iskonto $d^{(m)}$ ile gösterilir. Bir dönemin her bir alt dönemine karşılık gelen efektif iskonto oranı ise $\frac{d^{(m)}}{m}$ ile gösterilir. Nominal iskonto oranı da iskonto oranında olduğu gibi dönem başında peşin olarak yapılan faiz ödemesinin ölçümü olarak düşünülebilir. Dolayısıyla bir dönem sonunda birikimli değeri 1 birim olan yatırımın bugünkü değerinin efektif iskonto oranı ve nominal iskonto oranı üzerinden bugünkü değerlerinin eşdeğerliğinden

$$1-d=\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^m$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı bir ölçüm döneminin sonunda ödenecek 1 birimin bugünkü değerini gösterir. Bu eşitlik yeniden düzenlenerek efektif iskonto oranı, nominal iskonto oranı cinsinden

$$d=1-\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^m$$

ve nominal iskonto oranı da efektif iskonto oranı cinsinden

$$d^{(m)}=m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right]$$

eşitlikleri yazılabilir.

Nominal faiz ve iskonto oranları arasındada efektif faiz ve efektif iskonto oranları arasındaki ilişkiye benzer bir ilişki vardır. 1 birim nominal faiz oranı üzerinden bir dönem sonundaki birikimli değerinin, nominal iskonto oranı üzerinden birikimli değerinin eşitliği

$\boxed{9}$ $\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m} = \left[1-\frac{d^{(p)}}{p}\right]^{-p}$ şeklinde ifade edilir. Aslında bu eşitliğin her iki tarafı da 1 biriminin i efektif faiz oranı üzerinden bir dönem sonunda birikimli değeri olan 1+i'ye eşittir. faiz veya iskonto dönüşüm döneminin bir olması (m=1) durumunda $i^{(m)}=i$ ve $d^{(m)}=d$ olur.

<u>Örnek</u>: Aylığa dönüştürülebilir. Yıllık nominal iskonto oranı %8 olarak verildiğine göre, bu iskonto oranına eşdeğer ~~faiz oranını bulunuz~~ olan üç aylığa dönüştürülebilen yıllık nominal faiz oranını bulunuz.

$$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right] = \left[1-\frac{d^{(p)}}{p}\right]^{-p}$$

$$\left[1+\frac{i^{(4)}}{4}\right]^{4} = \left[1-\frac{0.08}{12}\right]^{-12}$$

$$\left[1+\frac{i^{(4)}}{4}\right] = \left[1-\frac{0.08}{12}\right]^{-3}$$

$$\frac{i^{(4)}}{4} = \left[1-\frac{0.08}{12}\right]^{-3} - 1$$

$$i^{(4)} = 4\left\{\left[1-\frac{0.08}{12}\right]^{-3} - 1\right\} = 0.08108$$

<u>Örnek</u>: üç aylığa dönüştürülebilir. Yıllık efektif iskonto oranı %6 olarak verildiğine göre 10 yıl sonra ödenecek 1000 TL'nin bugünkü değerini bulunuz

$$B.D = 1000\left[1-\frac{0.06}{4}\right]^{4.10} = 546.32.TL$$