FİNANS MATEMATİĞİNE GİRİŞ 17/04/2020

Aritmetik seri biçiminde değişen ödemelerin olduğu Annüitelerde P ve Q'nun alacağı değerlere bağlı bazı özel durumlar:

Bunların ilkinde P ve Q değerleri 1 birim alınır. yani birinci yılın sonunda 1 birim, 2ci yılın sonunda 2 birim,..., nci yılın sonunda n birim ödeme yapılmıştır bu annüitelerin bugünkü değeri $(Ia)_{\overline{n}|}$ ile gösterilir.

$$A = P a_{\overline{n}|} + Q\left(\frac{a_{\overline{n}|} - n v^n}{i}\right)$$

formülü daha önce elde edilmişti. Burada P ve Q yerine 1 olduğumuzda

$A \to (Ia)_{\overline{n}|}$ durumuna gelir.

$$(Ia)_{\overline{n}|} = 1\, a_{\overline{n}|} + 1\left(\frac{a_{\overline{n}|} - n v^n}{i}\right)$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{i\, a_{\overline{n}|} + a_{\overline{n}|} - n v^n}{i}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n}|}(1+i) - n v^n}{i} \qquad a_{\overline{n}|}(1+i) = \ddot{a}_{\overline{n}|} \text{ idi}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n v^n}{i} \text{ elde edilir.}$$

Bu annüitenin birikimli değeride $(Is)_{\overline{n}|}$ ile gösterilir.

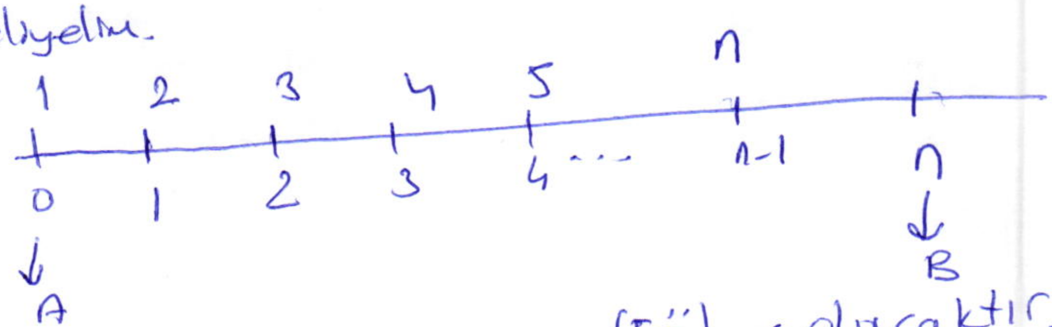
$$(Is)_{\overline{n}|} = (Ia)_{\overline{n}|}(1+i)^n \text{ olur.}$$

$$= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n v^n}{i}(1+i)^n = \frac{(1+i)\overbrace{a_{\overline{n}|}(1+i)^n}^{s_{\overline{n}|}} - n(1+i)^{-n}(1+i)^n}{i}$$

$$= \frac{(1+i)s_{\overline{n}|} - n}{i} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{i}$$

2

Biraz önce aritmetik seri biçiminde ($P=1$ ve $q=1$) artan dönem sonu annüitelerinin bugünkü değeri $(Ia)_{\overline{n}|}$ ve $(Is)_{\overline{n}|}$ formüllerini çıkarmıştık. Şimdi aynı durumun dönem başı olması halini inceleyelim.



Burada $A=(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ ve $B=(I\ddot{s})_{\overline{n}|}$ olacaktır.

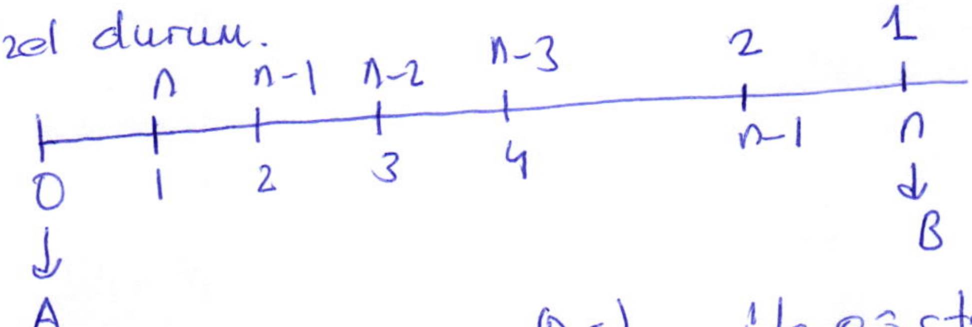
$(I\ddot{a})_{\overline{n}|}=(Ia)_{\overline{n}|}(1+i)$ dir.

$$A=(I\ddot{a})_{\overline{n}|}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}(1+i)$$ elde edilir

$$B=(I\ddot{s})_{\overline{n}|}=(Is)_{\overline{n}|}(1+i)$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n}|}=\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}-n}{i}(1+i)$$ elde edilir.

Aritmetik seri biçiminde değişen annüitelerde diğer bir özel durum.



$A=(Da)_{\overline{n}|}$ $\quad$ $B=(Ds)_{\overline{n}|}$ ile gösterilir

$\boxed{3}$ $A = p\, a_{\overline{n}|} + q\left(\dfrac{a_{\overline{n}|} - n v^n}{i}\right)$

$p = n \quad q = -1$ konur ise

$(Da)_{\overline{n}|}$ elde edilir.

$$A = n\, a_{\overline{n}|} + (-1)\left(\frac{a_{\overline{n}|} - n v^n}{i}\right)$$

$$(Da)_{\overline{n}|} = \frac{n i\, a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} + n v^n}{i}$$

$$= \frac{\left(n \cancel{i} \, \dfrac{1-\underbrace{(1+i)^{-n}}_{v^n}}{\cancel{i}}\right) - a_{\overline{n}|} + n v^n}{i}$$

$$= \frac{n - n(1+i)^{-n} - a_{\overline{n}|} + n v^n}{i}$$

$$= \frac{n - \cancel{n v^n} - a_{\overline{n}|} + \cancel{n v^n}}{i}$$

$$(Da)_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}$$

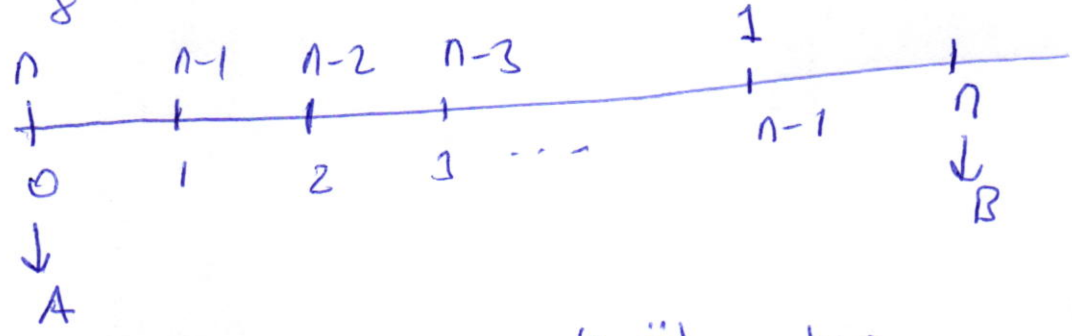
$$B = (Ds)_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}(1+i)^n$$

$$= \frac{\left(n - \left(\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)\right)}{i}(1+i)^n$$

$$= \frac{n(1+i)^n - \underbrace{\boxed{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}}}_{s_{\overline{n}|}}}{i}$$

$B = (Ds)_{\overline{n}|} = \dfrac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|}}{i}$ elde edilir.

$\boxed{4}$ ödemelerin birinci dönem başında n birim n-1 dönem başında 2 birim ve n'ci dönem başında 1 birim olarak yapılan Annüitenin zaman doğrusu



$A = (D\ddot{a})_{\overline{n}|}$ $\qquad B = (D\ddot{s})_{\overline{n}|}$ olur.

$$(D\ddot{a})_{\overline{n}|} = (Da)_{\overline{n}|}(1+i)$$

$$(D\ddot{a})_{\overline{n}|} = \left(\frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}\right)(1+i)$$

$$(D\ddot{s})_{\overline{n}|} = (Ds)_{\overline{n}|}(1+i)$$
$$= \left(\frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|}}{i}\right)(1+i)$$

ödeme tutarları aritmetik olarak değişen annüitelerde dönem sayısı sınırsızda olabilir. Birinci yılın sonunda P birim, ikinci yılın sonunda P+q birim, üçüncü yılın sonunda P+2q birim ... şeklinde bir ödemenin yapıldığı bir annüitenin i efektif faiz oranına göre bugünkü değeri

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty}\left[P\, \underset{0}{a_{\overline{n}|}} + q\, \frac{a_{\overline{n}|} - \underset{0}{n v^n}}{i}\right]$$

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty}\left[P\, \frac{1-\cancel{v^n}}{i} + q\, \frac{\frac{1-\cancel{v^n}}{i} - \cancel{n v^n}}{i}\right]$$

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} A = \frac{P}{i} + \frac{q}{i^2}$$ elde edilir.

$\boxed{5}$ Benzer biçimde birinci yılın başında P birim, ikinci yılın başında P+q birim, üçüncü yılın başında P+2q birim şeklinde ödemelerin yapıldığı annüitenin bugünkü değeri de

$\ddot{a}_{\infty\urcorner}$ olup $\ddot{a}_{\infty\urcorner} = a_{\infty\urcorner}(1+i)$ dir.

$$\ddot{a}_{\infty\urcorner} = \left(\frac{P}{i} + \frac{q}{i^2}\right)(1+i)$$

<u>Örnek</u> Bir annüitede birinci yılın sonunda 1000 TL ikinci yılın sonunda 900 TL 9 yılın sonunda 200 ve 10 yıl sonunda 100 TL ödemektedir. Yıllık efektif faiz oranı %10 olarak verildiğine göre bu annüitenin ilk ödeme yapılmasından bir yıl önceki değerini ve son ödeme yapıldığı andaki değerini bulunuz.

$$(Da)_{n\urcorner} = \frac{n - a_{n\urcorner}}{i}$$

$$100(Da)_{n\urcorner} = \frac{10 - \left(\frac{1-(1+0.1)^{-10}}{0.1}\right)}{0.1} \cdot 100 = \frac{100 - 6.1446}{0.1} = 3855.40$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 10}}{100}\,\underset{\substack{\downarrow \\ 0.1}}{(DS)}_{n\urcorner} = 100\,\frac{n(1+i)^n - S_{n\urcorner}}{i} = 100\left(\frac{10(1.1)^{10} - \frac{(1.1)^{10}-1}{0.1}}{0.1}\right)$$

$$= 10.000 \text{ TL}$$

6 Örnek

Bir annüitedede birinci yılın sonunda 100TL, ikinci yılın sonunda 150TL; üçüncü yılın sonunda 200TL ... v.b 50 birim artırılarak sürdürülen ödemeler yapılmaktadır. Yıllık efektif faiz oranı %10 olarak verildiğine göre bu annüitenin ilk ödeme yapıldığı andaki değerini buluruz.

Çözüm $t=1$ anındaki değeri soruluyor.

$A = \frac{P}{i} + \frac{q}{i^2}$ formülünde $P=100$ $q=50$ alındığında $t=0$ anındaki değerini buluruz.

$$A = \frac{100}{0.1} + \frac{50}{(0.1)^2} = 1000 + 5000 = 6000$$

bizden $t=1$ anındaki değeri istendiğine göre bunu 1 birim öteleriz $(A.(1+i))$

$A = 6000$ $i+1 = 1.1$

$$A(1+i) = 6000 \times 1.1 = 6600$$