20/04/2020

OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ

EŞİTLİK, EŞİTSİZLİK VE ÖZEL KISITLAR ALTINDA OPTİMİZASYON

ÖRNEK

$$\text{Min } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 14x_2$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3): -x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

problemini çözelim. Önce LAGRANGE FONKSİYONUNU oluşturalım.

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 14x_2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 2) + \mu(-x_1 + 2x_2 - 3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda + 2\mu \geq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \lambda \geq 0 \quad (3)$$

$$x_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu) = 0 \quad (4)$$

$$x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda + 2\mu) = 0 \quad (5)$$

$$x_3 \cdot \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_3 \cdot \lambda = 0 \quad (6)$$

$$\mu(-x_1 + 2x_2 - 3) = 0 \quad (7)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0 \quad (8)$$

$$-x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \quad (9)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (10)$$

2

a) $x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=0$ olduğunda (8) kısıtı sağlanmaz $(-2=0)$

b) $x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3\neq 0$ olduğunda $x_3\neq 0$ olduğundan

(6) nolu denklemden $\lambda=0$ elde edilir. (8) nolu denklemden, $x_3=2$ bulunur. (7) nolu denklemden $\mu=0$ bulunur.

bu durumda (1) nolu kısıt $2x_1+x_2-6+\lambda-\mu \geq 0 \quad -6\geq 0$ durumuna geleceğinden (1) nolu kısıt sağlanmaz

c) $x_1=0 \quad x_2\neq 0 \quad x_3=0 \quad (-x_1+2x_2-3\leq 0)$ sağlanmaz

(8) den $x_2=2$ elde edilir. bunlar (9) nolu denkleme konursa $4-3\leq 0$ olur sağlanmaz.

d) $x_1=0 \quad x_2\neq 0 \quad x_3\neq 0$ (5) nolu kısıttan $x_1+4x_2-14+\lambda+2\mu=0$ olur. (6) nolu kısıttan $\lambda=0$ olur. Bu durumda (5) nolu kısıt $4x_2-14+2\mu=0$ gelir. (7) nolu kısıt $\mu(2x_2-3)=0$ durumuna gelir. Bu durumda $\mu(2x_2-3)=0 \Rightarrow \mu=0$ Veya $2x_2-3=0$

i) $\mu=0$ ise. $4x_2-14=0 \quad x_2=7/2$ (8) nolu denklemden

$$x_1+x_2+x_3-2=0 \qquad x_3+\frac{7}{2}-2=0 \qquad x_3=-3/2$$

$$\downarrow_{0} \quad \downarrow_{7/2}$$

olurki (10) nolu kısıtlara aykırı olur.

ii) $\mu\neq 0$ ise $2x_2-3=0 \quad x_2=3/2$ olur. (8) nolu denklemde $x_3=1/2$ elde edilir. $4x_2-14+2\mu=0 \quad x_2=3/2 \quad \mu=4$ olur. (1) nolu kısıta bu bilgiler konursa yani

$$2x_1+x_2-6+\lambda-\mu\geq 0 \qquad 3/2-6-4\geq 0 \text{ olmaz.}$$

$$\downarrow_{0} \quad \downarrow_{3/2} \quad \downarrow_{0} \quad \downarrow_{4}$$

3 e) $x_1 \neq 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 \neq 0$

$2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu = 0$

$\lambda = 0$

$2x_1 + x_2 - 6 - \mu = 0$ elde edilir. $x_2 = 0$ olduğundan

$2x_1 - 6 - \mu = 0$ olur.

(7) kısıtından $\mu(-x_1 + 2x_2 - 3) = 0$.

i) $\mu = 0 \Rightarrow \quad 2x_1 - 6 = 0 \quad x_1 = 3$

(8) kısıtı $x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$ $x_1 = 3$ $x_2 = 0$ konursa $x_2 = -1$ elde edilir

(10) kısıtına aykırıdır.

ii) $\mu \neq 0 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - 3 = 0$ $x_2 = 0$ olduğundan

$x_1 = -3$ olur. (10) kısıtına aykırı

f) $x_1 \neq 0 \quad x_2 \neq 0 \quad x_3 = 0$

$2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu = 0$

$x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda + 2\mu = 0$

$\mu(-x_1 + 2x_2 - 3) = 0$

i) $\mu = 0 \quad 2x_1 + x_2 - 6 + \lambda = 0$ Taraf tarafa çıkarılırsa

$x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda = 0$

$x_1 - 3x_2 + 8 = 0$ (8) kısıtı

$x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$

$x_3 = 0$ olduğundan.

4

$x_1 - 3x_2 + 8 = 0$
$x_1 + x_2 - 2 = 0$ Taraf tarafa çıkarılırsa

$-4x_2 + 10 = 0 \quad x_2 = 5/2 \quad x_1 + \frac{5}{2} - 2 = 0$

$x_1 = -1/2$ elde edilir (10) kısıtına aykırıdır.

ii) $\mu \neq 0 \quad -x_1 + 2x_2 - 3 = 0$ (8) denkleminden $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

idi $x_3 = 0 \quad x_1 + x_2 = 2$
$-x_1 + 2x_2 = 3$ çözülürse $3x_2 = 5 \quad x_2 = 5/3$

$5/3 + x_1 = 2$
$x_1 = 2 - \frac{5}{3} \quad x_1 = 1/3$

$2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu = 0 \quad x_1 \neq 0$
$x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda + 2\mu = 0 \quad x_2 \neq 0$

buralarda $x_1 = 1/3 \quad x_2 = 5/3$ konursa

$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} - 6 + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 6 - 7/3 = 11/3$

$1/3 + \frac{20}{3} - 14 + \lambda + 2\mu = 0 \quad \lambda + 2\mu = 14 - \frac{21}{3} = 7$

$-3\mu = \frac{11}{3} - 7 = \frac{-10}{3} \quad \mu = 10/9 \quad \lambda - \frac{10}{9} = 11/3$

$\boxed{\lambda = 43/9}$

$(x_1 = 1/3 \quad x_2 = 5/3 \quad x_3 = 0 \quad \lambda = 43/9 \quad \mu = 10/9)$ bulunur.

5 h) $x_1 \neq 0 \quad x_2 \neq 0 \quad x_3 \neq 0$

$$2x_1 + x_2 - 6 + \lambda - \mu = 0$$

$$x_1 + 4x_2 - 14 + \lambda + 2\mu = 0$$

$$\lambda = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 6 - \mu = 0$$

$$x_1 + 4x_2 - 14 + 2\mu = 0$$

$$\mu(-x_1 + 2x_2 - 3) = 0 \Rightarrow$$ i) $\mu \neq 0$ $\quad -x_1 + 2x_2 - 3 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_2 + y_3 = 5$

$x_3 = 5 - 3x_2$

$$2x_1 + x_2 - \mu = 6$$

$$x_1 + 4x_2 + 2\mu = 14$$

$$-x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$ 3 bilinmeyen 3 denklem.

$$4x_1 + 2x_2 - 2\mu = 12$$

$$x_1 + 4x_2 + 2\mu = 14$$

$$5x_1 + 6x_2 = 26$$

5/ $-x_1 + 2x_2 = 3$

$$5x_1 + 6x_2 = 26$$

$$-5x_1 + 10x_2 = 15$$

$$16x_2 = 41$$

$$\boxed{x_2 = 41/16}$$

$$-x_1 + \frac{41}{8} = 3$$

$$-x_1 = 3 - \frac{41}{8}$$

$$-x_1 = \frac{24 - 41}{8}$$

$$-x_1 = \frac{-17}{8}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$\frac{17}{8} + 41/16 + x_3 = 2$ Sağlamaz. $\boxed{x_1 = 17/8}$

6

ii) $\mu=0$ ise

$$2x_1 + x_2 = 6$$

•2/ $x_1 + 4x_2 = 14$

$$2x_1 + x_2 = 6$$
$$-2x_1 - 8x_2 = -28$$
$$-7x_2 = -22$$
$$\boxed{x_2 = 22/7}$$

$$x_1 + \frac{88}{7} = 14$$
$$x_1 = 14 - \frac{88}{7}$$
$$x_1 = \frac{98-88}{7}$$
$$\boxed{x_1 = \frac{10}{7}}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_3 + \frac{22}{7} + \frac{10}{7} = 2$$
$$x_3 = 2 - \frac{22}{7} - \frac{10}{7}$$
$$x_3 = \frac{14-32}{7} < 0 \quad \text{Sağlanmaz}$$

$$M(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g(x^*) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \qquad 3h_2 + h_3 = 0 \qquad h_3 = -3h_2$$
$$-h_1 + 2h_2 = 0$$

7

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0$$

$$-h_1 + 2h_2 = 0$$

$$h_1 = 2h_2$$

$$h_3 = -3h_2$$

$$h = \begin{bmatrix} 2h_2 \\ h_2 \\ -3h_2 \end{bmatrix}$$

$$h' \mu(x^*)\, h = \begin{bmatrix} 2h_2 & h_2, & -3h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2h_2 \\ h_2 \\ -3h_2 \end{bmatrix}$$

$$= 8h_2^2 + 4h_2^2 + 2h_2^2 + 2h_2^2 = 16h_2^2 > 0$$

pozitif definit ohalde

($x_1 = 1/3$ $x_2 = 5/3$, $x_3 = 0$ $\lambda = 43/9$ $\mu = 10/9$)

Min noktadir.