23.03.2020

$\boxed{1}$

OPTIMIZASYON TEKNİKLERİ

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2$ fonksiyonunun

optimumlarını belirleyin.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 2x_1x_2 \\ -x_1^2 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x_1^2 - 2x_1x_2 = 0 \quad x_1(3x_1 - 2x_2) = 0 \to x_1 = 0$

$\to x_1 = \frac{2}{3}x_2$

Bulunanları $-x_1^2 + 4x_2 = 0$ denkleminde yerine

koyarsak $x_1 = 0$ için $x_2 = 0$; $x_1 = \frac{2}{3}x_2$ konursa da

$-x_1^2 + 4x_2 = 0 \quad -\frac{4}{9}x_2^2 + 4x_2 = 0 \quad \cancel{+}4x_2\left(+\frac{1}{9}x_2 \cancel{+1}\right) = 0$

$x_2 = 0 \quad x_2 = 9 \quad x_2 = 0$ için $x_1 = 0$ $x_2 = 9$ için

$x_1 = 6$ elde edilir. $A(0,0)$ $B(6,9)$ olur.

$f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2$

$x_1 = 6$ konursa $f(6, x_2) = 216 - 36x_2 + 2x_2^2$

Tek değişkenli fonksiyon elde edilir. Tek değişkenli

fonksiyonlarda Max yada minimumu bulmak için

$f'(6, x_2) = -36 + 4x_2 = 0$ $\boxed{x_2 = 9}$ elde edilir

$f''(6, x_2) = 4 > 0$ minimumluk koşulu Sanki $(x_1 = 6 \quad x_2 = 9)$

minimum gibi algılanabilir mi?

[2] $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2$

$x_2 = 9$ konursa

$f(x_1, 9) = x_1^3 - 9x_1^2 + 162$

$f'(x_1, 9) = 3x_1^2 - 18x_1 = 0 \nearrow 3x_1(x_1 - 6) = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_1 = 6$

$f''(x_1, 9) = 6x_1 - 18 \Big|_{x_1=6} = 18$ elde edilir > 0

$x_1 = 6$ konursa $\quad$ minimumluk koşulu.

O zaman $x_1 = 6$ $x_2 = 9$ için yine minimum olduğu söylenebilir mi?

İkinci mertebe koşullar

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(A) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$

$$h' H h = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [0, 4h_2] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 4h_2^2 \geq 0$$

$\nabla^2 f(A) = 4h_2^2 > 0$ pozitif definit $A(0,0)$ minimum çözümdür.

$\boxed{3}$ $\nabla^2 f(B) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36-18 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$

$x_1 = 6$
$x_2 = 9$

$\Delta_1 = 18$
$\Delta_2 = 72 - 144 = -72 < 0$

o halde B noktası Hessian Matrisi indefinit kılar.

$f(x,y) = x + \dfrac{1}{2x+y} - \dfrac{1}{x+y}$ kritik Noktalarını bulunuz

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{2}{(2x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{(2x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{1}{(2x+y)^2}$$

$(x+y)^2 = (2x+y)^2$ $2x+y = x+y$ $\boxed{x=0}$ $2x+y = -x-y$

$3x = -2y$

$\boxed{x = \frac{-2y}{3}}$

$x=0$ için $1 - \dfrac{2}{y^2} + \dfrac{1}{y^2} = 0$

$1 = \dfrac{1}{y^2}$ $y = +1$, $y = -1$

A $(0,1)$
B $(0,-1)$

$x = \dfrac{-2y}{3}$ konur ise $1 - \dfrac{2}{\left(\frac{y}{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{-y}{3}\right)^2} = 0$

$1 = \dfrac{1}{\left(\frac{y}{3}\right)^2}$ $\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$

$\frac{y}{3} = 1$ $\frac{y}{3} = -1$ $y = 3$ $y = -3$

$y = 3$ $x = -2$ C $(-2,3)$

$y = -3$ $x = 2$ D $(2,-3)$

$\boxed{4}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - 2(2x+y)^{-2} + (x+y)^{-2}\right)$$

$$= 4(2x+y)^{-3} \cdot 2 - 2(x+y)^{-3} \cdot 1$$

$$= \frac{8}{(2x+y)^3} - \frac{2}{(x+y)^{+3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{(2x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(-(2x+y)^{-2} + (x+y)^{-2}\right)$$

$$= 4(2x+y)^{-3} - 2(x+y)^{-3}$$

$$= \frac{4}{(2x+y)^3} - \frac{2}{(x+y)^{+3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial \cancel{x}}\left(-\frac{1}{(2x+y)^{+2}} + \frac{1}{(x+y)^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-(2x+y)^{-2} - (x+y)^{-2}\right)$$

$$= 4(2x+y)^{-3} \cdot 2 + 2(x+y)^{-3} \cdot 1$$

$$= \frac{8}{(2x+y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}$$

$\boxed{5}$ Hessian Matrıs

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{(2x+y)^3} - \frac{2}{(x+y)^3} & \frac{8}{(2x+y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3} \\ \\ \frac{8}{(2x+y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3} & \frac{4}{(2x+y)^3} - \frac{2}{(x+y)^3} \end{bmatrix}$$

a) $(0,1)$ için $\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 8$

$\Delta_2 = 16 - 100 = -84$

indefinit

b) $(0,-1)$ $\begin{bmatrix} -8+2 & -10 \\ -10 & -4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = -6$

$\Delta_2 = 12 - 100 = -88$

indefinit

c) $(-2,3)$ $\begin{bmatrix} -8-2 & -8+2 \\ -8+2 & -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = -10$

$\Delta_2 = 24$

Negatif definit max

d) $(2,-3)$ $\begin{bmatrix} 8+2 & 8-2 \\ 8-2 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 10$

$\Delta_2 = 24$

pozitif definit

Min.