1

FINANS MATEMATIĞİNE GİRİŞ 10.04.2020

Bilinmeyen Dönem Sayısı

Dönem başı ve Dönem sonu annüitede dönemsel efektif faiz oranı ve annüitenin birikimli veya bugünkü değeri verildiğinde annüitenin dönem sayısı Logaritma fonksiyonu kullanılarak elde edilebilir.

Örnek:

n yıllık dönem sonu annüitenin yıllık efektif %10 faiz oranına göre bugünkü değeri 6 olarak verildiğine göre n değerinin bulunuz.

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$6 = \frac{1-(1+0.10)^{-n}}{0.10}$$

$$0.6 = 1-(1+0,10)^{-n}$$

$$0.6 = 1-(1,1)^{-n}$$

$$(1,1)^{-n} = 0,4$$

$$(1.1)^{n} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$n \ln(1,1) = \ln 2.5$$

$$n = \frac{\ln 2.5}{\ln(1,1)} = 9.61$$ elde edilir.

2

Düzensiz ödeme tutarlı Annüite

Bir borcun ödenmesi yada belirli bir fon belirli bir vade içinde dağıtılmak istendiğinde, bazı durumlarda son düzenli ödemeden sonra ödenmesi gereken bir bakiye kalmaktadır. Kalan bu bakiye tutarına, düzensiz ödeme adı verilir. Burada düzensiz ödeme tutarı, düzenli ödeme tutarından büyükse balon ödeme; küçükse düşük ödeme adı verilir.

Kalan bu bakiye tutarının değeri, paranın zaman değerindeki değişimden etkilendiği için ödeme yapılacak zamanın bilinmesi önemlidir. Bu düzensiz ödeme tutarı için ödemenin yapıldığı zamana bağlı olarak üç farklı değer sözkonusudur.

1) Son düzenli ödemeyi izleyen düzenli ödeme zamanında yapılan düzensiz ödeme tutarı
2) Son düzenli ödemenin yapıldığı zamanki düzensiz ödeme tutarı
3) Son düzenli ödeme yapıldıktan sonraki dönem içinde herhangi bir noktada yapılan düzensiz ödeme tutarı

3 örnek:

10.000 TL lik bir borç her yılın sonunda yapılacak 1000TL tutarında ödemelerle kapatılmak istenmektedir. Yıllık efektif faiz oranı %8 olduğuna göre

1) Düzensiz ödemenin son düzenli ödemenin yapıldığı anda yapılması

1)in çözümü

$$1000\, s_{\overline{n}|i} + X_1 = 10000(1+i)^n$$

Burada n'yi bulabilmek için deneme yanılma yöntemi kullanılır. Yıllık efektif faiz oranının 0 (sıfır) olması durumunda dönem sayısının 10 olması beklenir. Yıllık efektif faiz oranını pozitif olarak verdiğimiz için 10dan büyük olması beklenir. Biz burada n=20 alalım.

$$1000\, s_{\overline{20}|0.08} + X_1 = 10000(1+0.08)^{20}$$

$$1000\, \frac{(1+0.08)^{20}-1}{0.08} + X_1 = 1000\,(1.08)^{20}$$

$X_1 = 847.61$ elde edilir.

2) Düzensiz ödemenin son düzenli ödeme zamanından 1 yıl sonra yapılması

2'nin çözümü

$$1000\, \ddot{s}_{\overline{20}|i} + X_2 = 10.000(1+i)^{21}$$

$$1000\,(1+0.08)\, \frac{(1+0.08)^{20}-1}{0.08} + X_2 = 10000\,(1+0.08)^{21}$$

$X_2 = 915.42$ TL olduğu bulunur.

3) Düzensiz ödemenin son düzenli ödeme yapıldıktan sonraki yıl içinde herhangi bir anda yapılması

3'ün çözümü

$1000\, a_{\overline{n+k}|i} = 10.000 \Rightarrow a_{\overline{n+k}|i} = 10$ elde

edilir. $a_{\overline{20}|i} = \left.\dfrac{1-(1+i)^{-20}}{i}\right|_{i=0.08} = 9.81$ bulunur.

$a_{\overline{21}|i} = \left.\dfrac{1-(1+i)^{-20}}{i}\right|_{i=0.08} = 10.02$ bulunur.

buna göre

$a_{\overline{n+k}|i} = 10$ denkleminde

$n=20$ alınır ise

$$\left.\frac{1-(1+i)^{-20}}{i}\right|_{i=0.08} = 10$$

$$\frac{1-(1+0.08)^{-(20+k)}}{0.08} = 10$$

$$1-(1.08)^{-(20+k)} = 0.8$$

$$1-0.8 = (1.08)^{-(20+k)}$$

$$0.2 = (1.08)^{-(20+k)}$$

$$(1.08)^{20+k} = \frac{1}{0.2} = 5 \qquad k = 0.9124 \text{ yıl}$$

5 yani 20 yıl ödemeden sonra 20 ile 21'ci yıl arasındaki tarih. 20 yıl tamamlandıktan sonra 0.9124 yıl sonra ödenmesi gerektiği ortaya çıkıyor. Bu miktarda, 1000 liranın 0,9124 yıl sonraki birikim değeri olmaktadır.

$$X_3 = 1000 \frac{(1+i)^{0.9124} - 1}{i}$$

$$X_3 = 1000 \frac{(1+0.08)^{0.9124} - 1}{0.08} = 909.29 \text{ dur.}$$

GENEL ANNÜITELER

Faiz döneminden farklı sıklıkta yapılan ödemeler

1) Verilen faiz oranı kullanılarak, düzenli ödeme aralıklarına ilişkin faiz oranı hesaplanır.

2) Elde edilen faiz oranı kullanılarak daha önceki elde edilen annüite formülleri yardımıyla annüitenin değeri bulunur.

Örnek: Yıllık efektif faiz oranı %10 olarak verildiğine göre, 20 yıl boyunca her üç ayda bir (üç ayın sonu) 1000 TL ödenen annüitenin bugünkü değerini bulunuz.

$(1+j)^4 = 1+i \quad i = \%10 \quad (1+j)^4 = 1.1 \Rightarrow j = (1.1)^{1/4} - 1$

$j = 0.0241$ üç aylık faiz oranı 20 yılda 80 tane 3 ay var o halde $a_{\overline{n}|} \cdot 1000 = a_{\overline{80}|0.0241} = \frac{1-(1+0.0241)^{-80}}{0.0241}$

$\boxed{6}$ $1000\, a_{80\rceil 0.0241} = 35319.40$ TL elde edilir.

Örnek: ödenmesi hemen başlayan ve 20 yıl boyunca her iki yılda bir 8000 TL ödenen annüitenin bugünkü değeri nedir? (yıllık efektif faiz %10 dur)

önce yıllık faiz iki yıllık faize dönüştürülür.

$1+k=(1+i)^2 \Rightarrow k=(1+i)^2-1 = (1+0,1)^2-1$ iki yıllık faiz oranı

$k=(1.1)^2-1 \Rightarrow k=0.21$

elde edilir.

dönem başı annüite $\ddot{a}_{n\rceil i} = (1+i)\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$n=10$ dur (iki yılda ödendiğinden) i yerine k değeri gelecek

$$\ddot{a}_{10\rceil k} = (1+k)\frac{1-(1+k)^{-10}}{k} = (1+0.21)\frac{1-(1.21)^{-10}}{0.21}$$

her iki yılda bir 8000 ödendiğinde

$$8000 \times \ddot{a}_{10\rceil 0.21} = 8000(1,21)\frac{1-(1,21)^{-10}}{0,21}$$

$$= 39243.20 \text{ TL}.$$

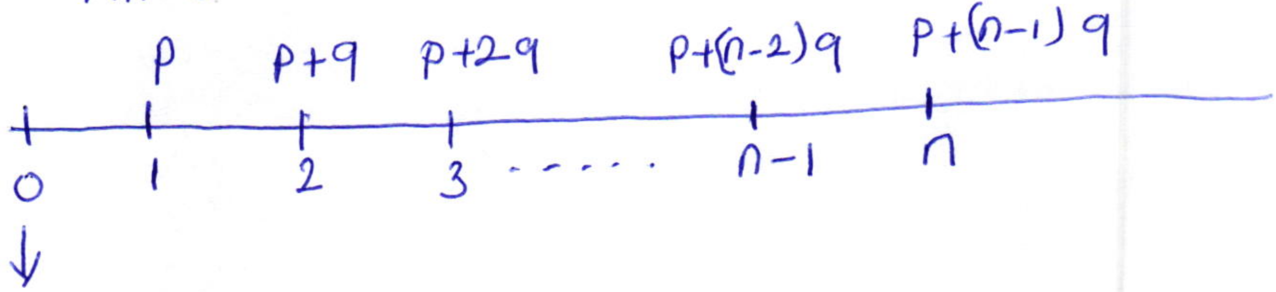
7

Değişen ödemeli Annüiteler

Bu kesimde ödeme tutarlarının farklı olduğu annüitelerin değerleri incelenecektir. Litaratürde bu tür annüitelere değişen ödemeli annüiteler denir.

1) Aritmetik seri biçiminde değişen ödemeli annüiteler
2) Geometrik seri biçiminde değişen ödemeli Annüiteler.

1) Aritmetik seri biçiminde değişen ödemeli Annüiteler.



$$A = Pv + (P+q)v^2 + (P+2q)v^3 + \dots + (P+(n-2)q)v^{n-1} + (P+(n-1)q)v^n$$

A'nın her iki tarafını $(1+i)$ ile çarparsak

$$(1+i)A = P + (P+q)v + (P+2q)v^2 + \dots + (P+(n-2))v^{n-2} + (P+(n-1)q)v^{n-1}$$

yukarıdaki iki denklemi birbirinden çıkartırsak

$$\cancel{iA = P + Pv + Pv^2}$$

$$iA = P - Pv^n + qv + qv^2 + \dots qv^{n-2} + qv^{n-1} + qv^n - nqv^n$$

$$iA = P(1-v^n) + qv(1+v+v^2+\dots+v^{n-1}) - nqv^n$$

$$iA = P(1-v^n) + qv\,\frac{1-v^n}{1-v} - nqv^n \qquad \frac{v}{1-v} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \frac{1}{i}$$

$$iA = P(1-v^n) + q\,\frac{1-v^n}{i} - nqv^n$$

$$A = P\frac{(1-v^n)}{i} + \frac{q}{i}\,\frac{1-v^n}{i} - \frac{nqv^n}{i}$$

$\boxed{8}$

$$A = P(a_{\overline{n}|i}) + \frac{q}{i} a_{\overline{n}|i} - \frac{q n v^n}{i}$$

$$A = P a_{\overline{n}|i} + \frac{q}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n v^n\right)$$

Bu annüitenin son ödeme yapıldıktan sonraki birikimli değeri

$$B = A(1+i)^n$$

$$B = \left[P\left(\frac{1-v^n}{i}\right) + \frac{q}{i}\left(\frac{1-v^n}{i} - n v^n\right)\right](1+i)^n$$

$$B = P\left(\underbrace{\frac{(1+i)^n-1}{i}}_{s_{\overline{n}|i}}\right) + \frac{q}{i}\left(\underbrace{\frac{(1+i)^n-1}{i}}_{s_{\overline{n}|i}} - n\right)$$

$$B = P s_{\overline{n}|i} + \frac{q}{i}\left(s_{\overline{n}|i} - n\right)$$ elde edilir.

<u>Örnek!</u> Bir annüitede 1ci yılın sonunda 100TL ikinci yılın sonunda 200TL ... 9 yılın sonunda 900 TL ve 10.cı yılın sonunda 1000TL ödenecektir. yıllık efektif faiz oranı %10 olarak verildiğine göre ilk ödeme yapıldıktan 1 yıl önceki değerini ve son ödeme yapıldığı andaki değerini bulunuz.

<u>Çözüm</u>
Burada $P = 100$ $q = 100$ ve $i = \%10 = 0{,}1$ dir.

$$A = P a_{\overline{n}|i} + \frac{q}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n v^n\right)$$

$$= 100\left(\frac{1-(1+i)^{-10}}{i}\right) + \frac{100}{i}\left(\frac{1-(1+i)^{-10}}{0.1} - 10(1+i)^{-10}\right)$$

$$= 100\left(\frac{1-(1.1)^{-10}}{0.1}\right) + \frac{100}{0.1}\left(\frac{1-(1.1)^{-10}}{0.1} - 10(1.1)^{-10}\right) = 2903.66$$

9

$$B = P\, s_{\overline{n}|i} + \frac{q}{i}\left(s_{\overline{n}|i} - n\right)$$ dır.

$$B = 100\,\frac{(1+i)^{+10}-1}{0.1} + \frac{100}{0.1}\left(\frac{(1+i)^{+10}-1}{0.1} - 10\right)$$

$$B = 100\,\frac{(1.1)^{10}-1}{0.1} + \frac{100}{0.1}\left(\frac{(1.1)^{10}-1}{0.1} - 10\right)$$

B = 7534,14 TL olarak son ödeme yaptığı andaki değer olarak bulunur.