10/03/2021

FİNANS MATEMATİĞİNE GİRİŞ

Finans yatırım planlaması, yatırım süresi içinde farklı zamanlardaki nakit girişleri ve nakit çıkışlarının planlama tarihindeki zaman değerleri esas alınarak yapılır. Planlama tarihindeki nakit girişlerinin zaman değerleri toplamı, nakit çıkışlarının zaman değerleri toplamından fazla olması durumunda finansal yatırım planının kazançlı olduğu anlaşılır. Farklı finansal yatırım araçları arasında karar verilmek istendiğinde de optimal yatırım seçeneği planlama tarihindeki zaman değeri pozitif ve en yüksek yatırım olarak seçilir.

Paranın zaman değeri olarak bakıldığında 100TL'nin bulunduğumuz andaki ve bir yıl sonraki değerleri aynı değildir. Bu eşitsizlik için iki temel neden vardır. Bunlardan ilki enflasyonun, alım gücünde azaltma yaratması nedeniyle bugün 100TL'ye alınabilecek bir emtianın bir yıl sonra 100TL'ye alınamamasıdır. İkincisi ise 100TL'nin yatırıma yönlendirilmemesi nedeniyle bir yıl içinde elde edilebilecek faiz gelirinden vazgeçilmesidir. Bu nedenlerden dolayı paranın zaman değerindeki değişimin incelenmesi finans matematiğinin temel problemlerinden biridir. Bu kitapta paranın zaman değerindeki değişime ilişkin iki temel soruya cevap aranacaktır.

1. Bugün yatırılan veya ödünç verilen belirli bir tutarın belirli bir süre sonundaki değeri nedir?

2. Belirli bir süre sonunda ödenecek belirli bir tutarın bugünkü değeri nedir?

2 Bu soruların cevabı, genel olarak paranın zaman değeri olarak adlandırılır. Bireyler birikimlerini değerlendirmek için farklı finansal işlemler yaparak kazanç sağlamak isterler. Örneğin bir borç verme işleminde borç veren kişi, borç verilen tutarın belirli bir süre kullanım hakkını devretmesi nedeniyle söz konusu işlemden kaynaklanacak zararın ödünç alan kişi tarafından karşılanmasını ister. Bu zarar faiz ile karşılanır. Faiz genel olarak, sermayeye gereksinim duyan bir bireyin ödünç aldığı para karşılığında ödünç veren kişiye ödediği karşılık olarak ya da kısaca ödünç alan kişinin ödünç veren kişiye ödediği kira olarak düşünülebilir. Bir borç verme işleminde üç temel kavram vardır. Bunlar başlangıç değer, vade ve faiz oranıdır. Başlangıç değer, borç verilen tutarı, Vade borcun ödenmesine kadar geçen süreyi; faiz ise alınan borç için vade sonunda ödenen tutarı ifade eder.

<u>Birikim ve Tutar fonksiyonları</u> Bir kişi, tasarrufunu belirli bir süre yatırıma yönlendirdiğinde, tasarruf tutarı, başlangıç değer yada anapara olarak ~~değerlendirilir~~. adlandırılır. Bu tutarın yatırım süresi sonundaki toplam değerine yatırımın birikimli değeri denir. Birikimli değer ile ana para arasındaki farka ise faiz yada dönem süresince elde edilen faiz denir. Yatırımın yapıldığı andan sonra geçen süre "t" ile gösterilir. Teorik olarak bu süre, gün ay yıl gibi birimlerle ifade edilir. ve ölçüm dönemi yada kısaca dönem olarak adlandırılır. Genel olarak tersi belirtilmediği sürece dönem yıl olarak alınır. Başlangıç döneminde 1 birim yatırıldığında $t (t \geq 0)$ anındaki değeri $a(t)$ ile gösterilir. Ve birikim fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada t dönem sayısını ifade eder.

3

Birikim fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) $a(0)=1$ dir. 1 Birimin yatırıldığı andaki değeri kendisine eşittir.

2) Birikim fonksiyonu $a(t)$, genel olarak artan bir fonksiyondur. Yani dönem sayısı arttıkça yatırımın birikimli değeri de artar. Dönem sayısı arttıkça $a(t)$ azalırsa, bu azalma negatif faiz oranından kaynaklanır. Negatif faiz oranı matematiksel olarak mümkün olmakla birlikte uygulamada karşılaşılan bir durum değildir. Eğer başlangıç değeri vade sonunda aynı kalırsa, yani $a(t)=1$ ise, dönem içindeki faiz oranı sıfır olarak gerçekleşmiş demektir.

3) Faiz oranı vade içinde sürekliyse, birikim fonksiyonu da süreklidir. Vade içinde faizin sürekli olmadığı durumlarda $a(t)$ fonksiyonu da sürekli değildir. $t=0$ anındaki başlangıç değeri 1 birim yerine, k $(k>0)$ birim ise bu yatırımın t $(t\geq 0)$ anındaki birikimli değeri tutar fonksiyonu olarak adlandırılır ve "$A(t)$" ile gösterilir. Dolayısıyla tutar fonksiyonu

$A(t)=k\,a(t)$ olarak tanımlanır. Burada $A(0)=k$ olur. $a(t)$'nin ikinci ve üçüncü özellikleri $A(t)$ içinde geçerlidir. Aslında birikim fonksiyonu tutar fonksiyonunun $k=1$ için özel durumudur. Bir yatırımın $[n-1, n]$ zaman aralığında yani $n$ci dönemde kazandırdığı faiz I_n ile gösterilir.

$$I_n = A(n) - A(n-1) \qquad n\geq 1$$

şeklinde ifade edilir.

4 Örnek

$A(t)=3t^2+6t+3$ tutar fonksiyonu verilmiştir.

a) $a(t)$ b) I_3 c) $A(4)$ d) $a(4)$ değerlerini bulunuz.

$A(0)=3.0^2+6.0+3=3$ $A(0)=k a(0)$ $3=k.1$ $k=3$

$a(0)=1$

Burada elde edilen $k=3$ değeri tutar fonksiyonunun birikim fonksiyonuna olan oranını gösterdiği için bu ilişki kullanılarak birikim fonksiyonu şu şekilde elde edilir.

$$A(t)=k a(t) \Rightarrow 3t^2+6t+3=3a(t) \quad a(t)=t^2+2t+1$$

Birikim fonksiyonu $t=0$ anında yatırılan 1 TL'nin t. dönem sonundaki birikimli değerinin t^2+2t+1 TL olduğunu ifade etmektedir.

b) Tutar fonksiyonunu kullanarak üçüncü dönemde elde edilen faiz tutarı aşağıdaki gibi bulunur.

$$I_3=A(3)-A(2)=[3.3^2+6.3+3]-[3(2^2)+6(2)+3]=48-27$$
$$=21\text{ TL}$$

$t=0$ anında yatırılan 3 TL'nin üçüncü dönem içinde kazandırdığı faiz tutarı 21 TL dir.

c) $A(4)$ ifadesi $t=0$ anında yatırılan 3. TL'nin, 4. yıl sonundaki birikimli değeridir.

$$A(4)=3.4^2+6.4+3=75\text{ TL}$$

d) $a(4)$ ifadesi $t=0$ anında yatırılan 1 TL'nin 4. yıl sonunda birikimli değerini gösterir.

$$a(4)=4^2+2.4+1=25\text{ TL}$$

5 Faizin ölçümü kullanılan sermayenin karşılığında ödenen kira olarak nitelendirilen faiz, çok farklı biçimlerde ölçülebilmektedir.

Faiz büyüme biçimine bağlı olarak basit faiz ve bileşik faiz olarak sınıflandırılabildiği gibi, ödeme sıklığına bağlı olarakda efektif nominal ve anlık faiz olarak sınıflandırılabilir. Faiz ölçümünde faiz ödemesinin dönem sonunda yapılması durumunda faiz (iç iskonto) dönem başında ödenmesi durumunda ise iskonto (dış iskonto) olarak adlandırılır.

Efektif faiz efektif faiz i ile gösterilir. i efektif faizi, dönem başında yatırılan 1 birimin dönem içinde kazandırdığı getirinin dönem sonunda ödenen tutarıdır. $i = a(1) - a(0)$ eşitliği ile ifade edilir. Dönemsel i efektif faiz oranıyla $t=0$ anında yatırılan 1 birimin birinci dönem sonundaki birikimli değeri

$$a(1) = 1 + i$$

biçiminde ifade edilir.

Efektif faizin özellikleri

1) Efektif sözcüğü, her bir faiz döneminde bir kez ödenen faiz için kullanılmıştır.
2. Efektif faiz genel olarak (%) ile ifade edilir.
3. Başlangıç değer, dönem boyunca herhangi bir nakit girişi ve çıkışı yapılmadığı takdirde sabittir.
4. Efektif faiz, 1 birimlik yatırım için dönem sonunda ödenen faiz tutarı olarak ölçülür.

Efektif faizin başlangıçtaki yatırım değerine oranı, efektif faiz oranı olarak adlandırılır. Bu oran birikim ve tutar fonksiyonları yardımıyla yatırımın birinci dönemi için

$$i = \frac{(1+i) - 1}{1} = \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)}$$

eşitliği ile yazılabilir. Diğer bir değişle i efektif faiz oranı dönem boyunca kazanılan faiz tutarının dönem başında yatırılan anapara tutarına oranıdır.

Efektif faiz oranı, herhangi bir yatırım dönemi içinde hesaplanabilir. i_n n.ci dönemdeki efektif faiz oranı olarak gösterildiğinde tutar fonksiyonu yardımıyla

$$i_n = \frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}$$

örnek: (0) anında yatırılan x TL'nin ikinci dönem sonundaki birikimli değeri 1000 TL'dir. (n). dönem için efektif faiz oranı $i_n = 0.015n$ olarak verildiğine göre, dördüncü dönemde kazanılan faiz tutarını bulunuz.

$A(2) = 1000$

$$i_n = \frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)} = 0.015n \qquad n=3 \quad \text{için} \quad i_3 \Rightarrow$$

$$i_3 = \frac{A(3)-A(2)}{A(2)} = 0.015 \cdot 3$$

$$A(3) = A(2) \cdot 0.045 + A(2)$$

$$A(3) = 45 + 1000 = 1045 \text{ TL}$$

$$i_4 = \frac{A(4)-A(3)}{A(3)} = \frac{A(4)-1045}{1045} = 0.06$$

$$A(4) = 1045 \times 0.06 + 1045$$

$$A(4) = 62.70 + 1045$$

$$I_4 = \frac{A(4)-A(3)}{A(3)} = \frac{62.70 + 1045 - 1045}{1045} = \frac{62.70}{1045}$$

$$I_4 = A(4) - A(3) = 62.70$$

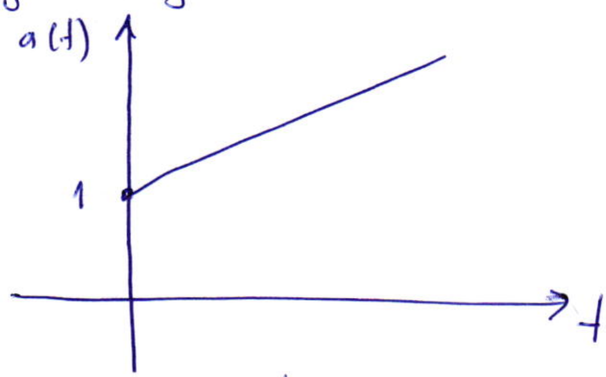
Basit Faiz ve Doğrusal Birikim Fonksiyonu

Bir dönemde kazanılan faiz tutarı $i = a(1) - a(0)$ olarak elde edilebilir. $a(0) = 1$ $a(1) = 1+i$ olduğundan bu iki nokta arasında tanımlanabilecek sonsuz sayıda fonksiyon vardır. Uygulamada bunlardan ikisi yaygın olarak kullanılır. Gerçek yaşamda en basit birikim fonksiyonu, sabit eğimli doğrusal bir fonksiyondur.

1 birimlik yatırımın her bir dönem boyunca kazandırdığı faiz tutarı sabit olsun. Bu varsayım altında 1 birimlik yatırımın birinci dönem sonundaki birikimli değeri $1+i$, ikinci dönem sonundaki birikimli değeri $1+2i$ ... şeklindedir. Böylece doğrusal fonksiyon yardımıyla birikim fonksiyonu

$$a(t) = 1 + it \quad ; \quad t \geq 0$$

biçiminde yazılabilir. Bu fonksiyona göre gerçekleşen faiz oranı basit faizdir. Basit faizde başlangıç sermayesi yatırım süresi boyunca değişmeden aynı kalır. ve faiz bu sermaye üzerinden hesaplanır. Basit faize göre birikim fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Doğrusal birikim fonksiyonu

i_n, n.ci dönemdeki efektif faiz oranı olarak tanımlandığında

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{[1+in] - [1+i(n-1)]}{1+i(n-1)} = \frac{in - i(n-1)}{1+i(n-1)} = \frac{1}{1+i(n-1)}$$

Burada i_n, n'nin azalan bir fonksiyonudur. Ve basit faiz oranına göre efektif faiz oranı dönem sayısı arttıkça azalır.

8 örnek $t=0$ anında yatırılan 100TL'nin yıllık %10 basit faiz oranı ile dördüncü yıl sonundaki birikimli değerini bulunuz.

Çözüm

(0) anında yatırılan 1000 TL'nin yıllık %10 basit faiz oranı ile dördüncü yıl sonundaki birikimli değeri

$$1000a(4)=1000\,[1+0.10\cdot 4]=1400\text{ TL'dir.}$$

Yıllık %10 basit faiz oranı ile dört yıllık dönemde kazanılan faiz tutarı $t=0$ anında yapılan yatırımın dördüncü yılın sonunda elde edilen birikimli değerinden başlangıç yatırım tutarı çıkarılmasıyla elde edilir.

$$1400-1000=400\text{ TL}$$

Basit faiz genelde bir yıldan kısa vadeli yatırım gelirlerinin hesaplanmasında kullanılır. Tasarruf ve yardım sandıkları, üyelerine temettü dağıtırken ya da borç verirken basit faiz oranını kullanır.

Faiz oranı yıllık olmasına rağmen yatırım dönemi gün veya ay cinsinden ölçülüyorsa basit faiz formülünün kullanılabilmesi için vadenin yıl cinsinden ifade edilmesi gerekir. Burada 1 yılın kaç gün olduğuna ilişkin 2 türlü yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlardan birincisi 1 yılın 360 gün ikincisi de 1 yılın 365 gün olduğu varsayılır. Birinci yaklaşım kullanıldığında bir günlük bir süre bir yılın $1/360$'ı alınır. Bu yaklaşım kullanılarak yapılan hesaplamalarda faize ticari (adi) faiz; ikinci yaklaşımda ise, bir günlük süre bir yılın $1/365$'i olarak tanımlanır. Bu yaklaşıma göre hesaplanan faize ise tam (gerçek) faiz uygulaması adı verilir. Burada borç alan kişi ödemeyi tam faiz uygulaması yerine ticari faiz uygulamasına göre yaparsa daha fazla faiz öder. Hesaplama kolaylığından dolayı borç veren kişiler veya kurumlar tarafından ticari faiz uygulaması daha çok tercih edilmektedir.

9 **örnek** yıllık %10 efektif faiz oranı ile 10.000 TL borç verilmiştir. 60 gün sonra elde edilen faiz tutarının ticari faiz ve tam faiz uygulamasına göre bulup karşılaştırınız

Çözüm

x: Ticari faiz uygulaması

y: Tam faiz uygulaması

$$x = 10.000(0.10)\frac{60}{360} = 166.67 \text{ TL}$$

$$y = 10.000\ (0,10)\frac{60}{365} = 164.38 \text{ TL}.$$

$$x - y = 166.67 - 164.38 = 2.29 \text{ TL}$$

Ticari faiz uygulaması ile elde edilen faiz tutarı Tam faiz uygulaması ile elde edilen faiz Tutarından 2.29 TL fazladır.

Basit faiz hesaplarında süre belirlenirken de iki farklı yaklaşım söz konusudur. ilk günün sayılmayıp son günün dahil edildiği ve ayların normal sürelerinin dikkate alındığı hesaplama yöntemine tam süre uygulaması, ilk günün sayılıp son günün sayılmadığı ve bir ayın 30 gün olarak alındığı hesaplama yöntemine yaklaşık süre uygulaması adı verilir. Bunlar gözönüne alınarak

1) Ticari faiz ve tam süre uygulaması
2) Ticari faiz ve yaklaşık süre uygulaması
3) Tam faiz ve Tam süre uygulaması
4) Tam faiz ve yaklaşık süre uygulaması

örnek 2 Temmuz ve 6 eylül arasındaki tam süre ve yaklaşık süre uygulamasına göre hesaplayın.

10 Çözüm:

a) 2 Temmuz 31 Temmuz ⇒ $31-2=29$ gün Ağustos 31
Eylül 6 gün $31+29+6=66$ gün. Tam süre

b) 2 Temmuz – 1 Ağustos 30 gün.
2 Agustos – 1 eylül 30 gün
2 Eylül – 5 eylül 4 gün

$30+30+4=64$ gün.