$\boxed{1}$ 17/03/2021

OPTIMIZASYON TEKNIKLERI

$f(x,y,z) = x^2+y^2+5z^2+2\alpha xy-2xz+4yz$ fonksiyonunun konveks fonksiyon olabilmesi için α parametresinin değişeceği aralığı bulunuz.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2\alpha y-2z \\ 2y+2\alpha x+4z \\ 10z-2x+4y \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 2\alpha & -2 \\ 2\alpha & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2\alpha \\ 2\alpha & 2 \end{vmatrix} = 4-4\alpha^2 > 0$$

$4-4\alpha^2=0 \quad \alpha^2=1$

$\alpha=1$

$\alpha=-1$

		-1		$+1$	
$4-4\alpha^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\alpha \in [-1, +1]$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2\alpha & -2 \\ 2\alpha & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 40-16\alpha-16\alpha-(+8+32+40\alpha^2)$$

$= \cancel{40}-32\alpha\cancel{+8}\cancel{+32}-40\alpha^2$

$= -32\alpha-40\alpha^2=0$

$(-4-5\alpha)\alpha=0$

$\alpha=0 \quad \alpha=-4/5$

		$-4/5$		0	
$\Delta_3 = -40\alpha^2-32\alpha$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\alpha \in [-4/5, 0]$

$\boxed{2}$ $f: \mathbb{R}^3 \to R$ $\quad f(x) = x_1 . x_2 . x_3 \quad h = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$

verildiğine göre f'nin h vektörü doğrultusundaki türevini hesaplayın.

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \nabla f . \frac{h}{|h|} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T h^T$$

$$= \frac{\left[x_2 x_3, \; x_1 x_3, \; x_1 x_2\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{\underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}_{1}}$$

$$= \frac{1}{2} x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 x_2$$

Teorem (1) f, $\mathbb{R}^n$de sürekli fonksiyonlara sahip $f(x)$ fonksiyonunun x^* gibi yerel maksimuma sahip olabilmesi için gerek şart $\nabla f(x^*) = 0$ olmasıdır.

ispat $x^* \in X$ f'ye bir maksimum çözüm olsun. $\forall h \in \mathbb{R}^n$ ve yeterince küçük $\delta > 0$ için $(x^* + \delta h) \in X$ dır, üstelik $f(x^*) \geq f(x^* + \delta h)$ dır. $f(x^* + \delta h)$'a x^* civarında Taylor serisine açarsak

$$f(x^* + \delta h) = f(x^*) + (\delta h)' \nabla f(x^*) + \underbrace{\frac{(\delta h)' \nabla^2 f(x^*) (\delta h)}{2}}_{O(\delta^2)} + \ldots$$

$f(x^*) \geq f(x^* + \delta h)$ idi

$\cancel{f(x^*)} \geq \cancel{f(x^*)} + (\delta h)' \nabla f(x^*) + O(\delta^2)$ ve her iki tarafı δ ile bölünürse ve $\delta \to 0$ götürülür ise

$$h' \nabla f(x^*) \cancel{+ O(\delta)}^{0} \leq 0$$

elde edilir.

$\boxed{3}$ Bu eşitsizlik $\forall h \in \mathbb{R}^n$ için doğru olduğundan

$(-h) \in \mathbb{R}^n$ içinde doğrudur.

$$(-h)\nabla f(x^*) \leq 0 \qquad h\nabla f(x^*) \geq 0$$

o halde 2 eşitsizlik elde edilir

$$\left.\begin{array}{l} h'\nabla f(x^*) \leq 0 \\ h'\nabla f(x^*) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h'\nabla f(x^*) = 0$$

$h' \neq 0$ $\nabla f(x^*) = 0$ elde edilir.

<u>Teorem (2)</u> X açık ve konveks küme olsun. f, X üzerinde 2 kez türevlenebilen sürekli fonksiyon olsun. $x^* \in X$'in yerel maksimum olabilmesi için $\nabla^2 f(x^*)$'ın negatif definit olmasıdır.

<u>İspat</u> Eğer $x^* \in X$ yerel maksimum ise $\nabla f(x^*) = 0$ idi.

$$f(x^*) \geq f(x^* + \delta h)$$

$f(x^* + \delta h)$ Taylor serisine açılır ise

$$f(x^* + \delta h) = f(x^*) + (\delta h)'\nabla f(x^*) + \frac{(\delta h)'\nabla^2 f(x^*)\delta h}{2!} + O(\delta^3)$$

$f(x^*) \geq f(x^* + \delta h)$ idi

$$\cancel{f(x^*)} \geq \cancel{f(x^*)} + (\delta h)'\overset{0}{\cancel{\nabla f(x^*)}} + \frac{(\delta h)'\nabla^2 f(x^*)\delta h}{2!} + O(\delta^3)$$

$$0 \geq \frac{(\delta h)'\nabla^2 f(x^*)\delta h}{2} + O(\delta^3)$$ δ^2 ile bölünür $\delta \to 0$ giderken

$$0 \geq \frac{h'\nabla^2 f(x^*) h}{2} + \overset{0}{\cancel{O(\delta)}}$$

$\nabla^2 f(x^*)$ negatif definit olur.

4) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$ fonksiyonunun kritik noktalarını ve cinslerini belirleyiniz.

Çözüm

$\nabla f = 0$ dan kritik noktalar bulunacak

$\nabla^2 f$'te kritik noktalar yerine konup $\nabla^2 f$ negatif definitse koyulan nokta maksimum; pozitif definitse minimum definit değilse eğer noktası oluyor.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x \qquad \nabla f = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$3x^2 + 6x = 0 \quad 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$3y^2 - 6y = 0 \quad 3y(y-2) = 0 \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

noktalarımız $(0,0)$ $(0,2)$ $(-2,0)$ $(-2,2)$ olur.

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 6 > 0 \quad \Delta_2 = -36 < 0$$ definit değil

$(0,0)$ eğer noktasıdır.

$$\nabla^2 f(0,2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 6 > 0 \quad \Delta_2 = 36 > 0$$ pozitif definit

$(0,2)$ min. noktadır.

$$\nabla^2 f(-2,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = -6 < 0 \quad \Delta_2 = 36 > 0$$ negatif definit Max. nokta

$(-2,0)$ max. noktadır.

5

$$\nabla^2 f(-2,2) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = -6 \quad \Delta_2 = -36 \quad \text{definit değil}$$

$(-2, 2)$ noktası Eğer noktasıdır.

Kısıtsız optimizasyon problemine sayısal yöntemler.

$\mathbb{R}^n$'de tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $\nabla f(x)$ yönünde hareket ettikçe değer kazanır. Zıt yönde hareket ettikçe değer yitirir. Bu basit anlayıştan hareketle çözüm yöntemleri bulunmuştur.

Algoritmanın genel şekli

Adım 1 $\quad x_0$ seç

Adım 2 $\quad \nabla f(x_i)$'yi hesapla $\nabla f(x_i) = 0$ ise dur.

Adım 3 $\quad x_{i+1} = x_i - \alpha_i \nabla f(x_i)$ ötelemesini yap ve adım 2'ye dön. Burada α_i adım değeri $\alpha_i > 0$ olmak üzere $f(x_i - \alpha \nabla f(x_i))$'yı α'ya göre minimize ederek bulunur.

Newton yöntemi: $f(x)$ en az ikinci mertebe türevleri sürekli fonksiyon olsun. x^* gibi bir yerel minimum olmak üzere x^* civarındaki bir x_i noktasında. ikinci terime kadar Taylor serisine açalım.

$$f(x) = f(x_i) + \frac{\nabla f(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{1}{2!}(x - x_i)' \nabla^2 f(x_i)(x - x_i) + \dots$$

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_i) + \nabla^2 f(x_i)(x - x_i) + O(x - x_i)^3$$

$x = x^*$ alınır ise

$$\underbrace{\nabla f(x^*)}_{0} = \nabla f(x_i) + \nabla^2 f(x_i)(x^* - x_i) + \overset{0}{\cancel{O(x^* - x_i)^3}}$$

$$0 = \nabla f(x_i) + \nabla^2 f(x_i)(x^* - x_i)$$

$\boxed{6}$

Son denklemin her iki yanını $(\nabla^2 f(x_i))^{-1}$ ile çarpılırsa

$$0 = \underbrace{(\nabla^2 f(x_i))^{-1}}_{n\times n} \cdot \underbrace{\nabla f(x_i)}_{n\times 1} + x^* - x_i$$

$$x_i - (\nabla^2 f(x_i))^{-1} \cdot \nabla f(x_i) = x^* \qquad x^* \to x_{i+1}$$

$$x_{i+1} = x_i - (\nabla^2 f(x_i))^{-1} \cdot \nabla f(x_i) \quad \text{elde edilir.}$$

$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ $x_0 = [1, 1]^T$ başlangıç çözümünü kullanarak Newton metoduyla çözünüz.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 8-2 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f(x_0)$ denklenebilir. $(\nabla^2 f(x_0))^{-1}$'i bulalım.

$$\left[\begin{array}{cccc} 8 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1/4 & 1/8 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & 2/3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1/6 & +1/6 \\ 0 & 1 & 1/6 & 2/3 \end{array}\right] \Rightarrow (\nabla^2 f(x_0))^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$\boxed{7}$

Newton formülünde $i=0$ alınırsa

$$x_1 = x_0 - (\nabla^2 f(x_0))^{-1} \cdot \nabla f(x_0)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

çözüm optimaldir.

<u>Örnek</u> $x^2+y^2+z^2=4$ küresi üzerinde $(3,1,-1)$ noktasına en yakın noktayı belirleyiniz.

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

$$d^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

$$L = \lambda(x^2+y^2+z^2-4) + (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda x + 2(x-3) \Rightarrow \lambda = \frac{3-x}{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda y + 2(y-1) \Rightarrow \lambda = \frac{1-y}{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda z + 2(z+1) \Rightarrow \lambda = \frac{-1-z}{z}$$

$\boxed{8}$

$$\frac{3-x}{x}=\frac{1-y}{y} \qquad \frac{3-x}{x}=\frac{-1-z}{z}$$

$$3y-\cancel{xy}=x-\cancel{xy} \qquad 3z-\cancel{xz}=-x-\cancel{xz}$$

$$\boxed{x=3y} \qquad \boxed{x=-3z}$$

$$x^2+y^2+z^2=4 \qquad 3y=-3z$$

$$y=-z$$

$$9y^2+y^2+y^2=4$$

$$11y^2=4$$

$$\boxed{y=\frac{2}{\sqrt{11}}} \quad \boxed{x=\frac{6}{\sqrt{11}}} \quad z=\frac{-2}{\sqrt{11}}$$

$$y=\frac{-2}{\sqrt{11}} \quad x=\frac{-6}{\sqrt{11}} \quad z=\frac{2}{\sqrt{11}}$$

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}} \quad \frac{1-\frac{2}{\sqrt{11}}}{\frac{2}{\sqrt{11}}}\right)$$

$$\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}} \quad \frac{2}{\sqrt{11}} \quad \frac{1+\frac{2}{\sqrt{11}}}{\frac{2}{\sqrt{11}}}\right)$$

elde edilirler.