1

20.10.2020

LINEER PROGRAMLAMA TEORİSİ

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 - x_2 \le 10$$
$$2x_1 \le 40 \quad \Rightarrow \text{ yada}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 - x_2 \le 10$$
$$x_1 \le 20$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

problemini simpleks yöntemle çözelim

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + x_4 = 20$$
$$x_1, \dots x_4 \ge 0$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$

B		C	c_1 2	c_2 1	c_3 0	c_4 0	OR
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	
3	0	$x_3 = 10$	1	−1	1	0	10
4	0	$x_4 = 20$	1	0	0	1	20
$c_r - z_r$		$z = 0$	2	1	0	0	

$\uparrow$

v_1 Tabana girer oran sonucunda v_3 tabandan çıkan. yeni Taban $(1,4)$ yani (V_1, V_4) tabanı olur

$$(V_1, V_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (V_1, V_4)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{km}$$

1 satırın (-1) katı 2. satıra eklenirse

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (V_1, V_4)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ elde edilir.}$$

B		C	c_1	~~c_2~~	c_3	c_4	~~ORAN~~
j	c_j	V_0	V_1	~~V_2~~	V_3	V_4	
1		$x_1 =$					
4	0	$x_4 =$					

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B		C	c_1 2	c_2 1	c_3 0	c_4 0	~~ORAN~~
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	
1	2	$x_1=10$	1	-1	1	0	X
4	0	$x_4=10$	0	1	-1	1	10 ←
c_r-z_r		$z_0=20$	0	3	-2	0	

↓

Tabana girer

V_2 Tabana girer oran Sonucunda V_4 Tabandan çıkar. $(V_1\ V_2)$ yeni taban $(V_1, V_2)^{-1} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ikinci satır 1.ci satıra eklensin

$$(V_1, V_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B		C	c_1 2	c_2 1	c_3 0	c_4 0	~~ORAN~~
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	
1	2	$x_1=20$	1	0	0	1	20/0
2	1	$x_2=10$	0	1	-1	1	10/-1
c_r-z_r			0	0	1	-1	

↑

V_3 tabana girer ancak 20/0 ve 10/-1 oranları elde edilir oran yapılamaz

$V_0 = 20V_1 + 10V_2$ (1)

$V_3 = 0V_1 - 1V_2$ (2)

V_3 vektörü λ ile çarpılıp V_0'dan çıkarılırsa

$V_0 - \lambda V_3 = 20V_1 + 10V_2 + \lambda V_2$

$V_0 = 20V_1 + (10+\lambda)V_2 + \lambda V_3$

3

yani Tabana V_3 giriyor ancak tabandan 1 vektör çıkarılamıyor buna (unbounded) yada Sınırsız çözüm diyoruz. en son elde ettiğimiz

$$V_0 = 20V_1 + (10+\lambda)V_2 + \lambda V_3$$

$x_1 = 20 \quad x_2 = 10+\lambda \quad x_3 = \lambda$ olduğunu görürüz. Bu değişkenleri amaç fonksiyonunda yerine koyarsak

Makz $= 2x_1 + x_2$ idi (amaç fonksiyonumuz)

Makz $= 2(20) + 10 + \lambda = 40 + 10 + \lambda = 50 + \lambda$

λ değeri pozitif keyfi bir değer olduğu için amaç fonksiyon λ ya bağlı artacaktır. Yani sınırsız yani sınırsız bir artış olur.

amaç fonksiyonu olur.

uygun olmayan çözüme örnek verelim.

Makz $= 3x_1 + 2x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 2$

$3x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

Makz $= 3x_1 + 2x_2$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$3x_1 + 4x_2 - x_4 = 12$

$x_1, \ldots x_4 \geq 0$

Ancak $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(V_3, V_4) birim matris oluşturamıyor. Bu nedenle

Makz $= 3x_1 + 2x_2$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$3x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 12$

diye x_5 değişkeni ilave edilirse

4

x_5 değişkenini sıfır yapmak durumundayız. Bu nedenle çünkü x_5 değişkeni eşitliğe rağmen konmuştur. bunu sıfır yapabilmek için Amaç fonksiyonuna $-Mx_5$ konur. $M>0$ çok büyük bir sayıdır. Yani amaç fonksiyonu büyümek istiyecek ancak $-Mx_5$ değeri nedeniyle küçülecektir bu sorun $x_5=0$ alınarak çözülür buda bizim işimize gelir. problemimiz Min amaca sahip olsaydı $+Mx_5$ değeri amaç fonksiyonuna ilave edilirdi. Şimdi problemimizi Simpleks yöntem ile çözelim.

yani

$$\text{Maks } z = 3x_1+4x_2-Mx_5$$

$$2x_1+x_2+x_3=2$$

$$3x_1+4x_2-x_4+x_5=12$$

$$x_1,\dots,x_5 \geq 0$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	
			3	4	0	0	$-M$	Oran
j	c_j	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
3	0	$x_3=2$	2	1	1	0	0	$2/1=2$
5	$-M$	$x_5=12$	3	4	0	-1	1	$12/4=3$
c_r-z_r		$z_0=0$	$3+M$	$4+M$	0	0	0	

$\uparrow$

v_3 çıktı v_2 girdi tabanımız (v_2, v_5) olur

$(v_2\ v_5)^{-1} = ?$

5

$$(V_2\ V_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

1ci satırın (−4) katı
2ci satıra ilave edilir ise

$$(V_2, V_5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$ elde edilir.

B		C	c_1 3	c_2 4	c_3 0	c_4 0	c_5 −M	ORAN
j	C_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
2	4	$x_2=2$	2	1	1	0	0	
5	−M	$x_5=4$	−5	0	−4	−1	1	
C_r-Z_r		$Z_0=8-4M$	$-5-5M$	0	$-4M$	$-M$	0	

C_r-Z_r simpleks çarpanları negatif yada sıfırdır. dolayısıyla tabana hiç bir vektör sokamıyoruz. Ancak V_5 vektörünü tabandan çıkaramıyoruz. Bunun anlamı $x_5 \neq 0$ demektir. Biz eşitlik kısıtına x_5 ilave ediyoruz x_5'in sıfır olması gerekirken $x_5=4$ gibi değer buluyoruz bu da bize uygun olmayan çözümü veriyor.

<u>Örnek problem:</u> Bir üretim şirketi A, B ve C gibi 3 tür lastik üretmektedir. Bu şirket 2 adet fabrikaya sahiptir. 1ci fabrika günlük 50 tane A lastiği 80 tane B lastiği ve 200 tane C lastiği üretiyor ikinci fabrika ise (günlük)

6 60 tane A, 60 tane B ve 180 tane C lastiği üretmektedir. Aylık talep 2500 A lastiği, 3000 B lastiği ve 7000 C lastiğidir. 1ci fabrikanın günlük masrafı 25000 birim ve ikinci fabrikanın ise 35000 birimdir. Bu verilere göre her fabrika ayda kaç gün çalışacaktır?

x_1 1ci fabrikanın bir ayda çalıştığı gün sayısı

x_2 2ci 〃 〃 〃 〃

$$\text{Min } z = 25000x_1 + 35000x_2$$

$$50x_1 + 60x_2 \geq 2500$$

$$80x_1 + 60x_2 \geq 3000$$

$$200x_1 + 180x_2 \geq 7000$$

$$x_1 \leq 30$$

$$x_2 \leq 30$$

1 ay = 30 gün

$$x_1, x_2 \geq 0$$

elde edili..

İşaretten bağımsızlık x_j işaretten bağımsız ise $x_j = x_j' - x_j''$ $x_j' \geq 0$ $x_j'' \geq 0$

Örnek problem; bir şirket 2 tür ürün üretmekte birinci üründen 30 $ ve ikinci üründen 40 $ kar etmektedir. Şirket 65 saat işçi zamanına ve 45 saat makina zamanına 2 ürünü üretmek için sahiptir. İşçi için ilave zaman fiyatı 15 $ ve makina için 10 $ dır.

$\boxed{7}$ Aşağıda verilen tabloda 1ci ve 2ci üretilecek ürünler için makina ve işçi zamanları verilmiştir.

	İşçi	Makina
ürün 1	2	1
ürün 2	1	2

Şirketin maksimum kara ulaşması için gerekli L.P modelini kurunuz

x_1: 1ci ürün miktarı

x_2: 2ci ürün miktarı

$$Maks\ z = 30x_1 + 40x_2$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 65$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Maks\ z = 30x_1 + 40x_2 - 15x_3'' - 10x_4''$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 65 \qquad x_3 = x_3' - x_3''$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 45 \qquad x_4 = x_4' - x_4''$$

x_3 ve x_4 işaretten bağımsız değişkenlerdir.

$$Maks\ z = 30x_1 + 40x_2 - 15x_3'' - 10x_4''$$

$$2x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' = 65$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4' - x_4'' = 45$$

$$x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4', x_4'' \geq 0$$

Mak $z = 2x_1 + x_2$

$x_1 + 2x_2 \leq 24$

$4x_1 + x_2 \leq 30$

$x_1, x_2 \geq 0$

Mak $z = 2x_1 + x_2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$

$4x_1 + x_2 + x_4 = 30$

$x_1, \ldots x_4 \geq 0$

simpleks yöntemle çözelim.

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	
			2	1	0	0	ORAN
j	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	EN küçük
3	0	$x_3 = 24$	1	2	1	0	24
4	0	$x_4 = 30$	4	1	0	1	15/2
$c_r - z_r$		$z_0 = 0$	2	1	0	0	

$\begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

V_1 tabana girdi. Çünkü $c_1 - z_1 = 2$ ~~x_3~~ x_3 ve x_4'lü tabana girecek V_1 vektörünün bileşenlerine oranladık en küçük oran 15/2 olduğu için buna karşılık V_4 vektörü tabandan çıkıyor. yeni tabanımız. $(V_3\, V_1)$ oluyor $(V_3, V_1)^{-1}$ bulmak için

$$(V_3, V_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

ikinci satır 4'e bölünecek

IIci satırın (-1) katı I.ci satıra ilave edilecek

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$(V_3, V_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$ olur. Yukarıdaki tabloyla çarpalım.

yeni tablo

$$\begin{pmatrix} 4/7 & 0 \\ -1/7 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$

B	C	c_1	c_2	c_3	c_4	
		2	1	0	0	
j | c_j	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	ORAN
3 | 0	$x_3=\frac{33}{2}$	0	7/4	1	-1/4	66/7
1 | 2	$x_1=\frac{15}{2}$	1	1/4	0	1/4	30
c_r-z_r	$z_0=15$	0	1/2	0	-1/2	

$\uparrow$

V_2 tabana girer $c_2-z_2=1/2>0$ oran neticesinde en küçük oran 66/7 den olduğu V_3 tabandan çıkar. Yeni tabanımız (V_2, V_1) olur. Tersini alalım.

$$\begin{pmatrix} 7/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/7 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.ci satır 4/7 ile çarpılır.

Birinci satırın $(-1/4)$ katı, ikinci satıra ilave edilir.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/7 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (V_2, V_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/7 & 0 \\ -1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

yukarıdaki tablo ile çarpılırsa

B	C	c_1	c_2	c_3	c_4	
		2	1	0	0	ORAN
j | c_j	w_0	v_1	v_2	v_3	v_4	x_j/a_{ij}
2 | 1	$x_2=\frac{66}{7}$	0	1	4/7	-1/7	
1 | 2	$x_1=\frac{36}{7}$	1	0	-1/7	2/7	
c_r-z_r	$z_0=\frac{138}{7}$	0	0	-2/7	-3/7	

Simpleks çarpanları negatif yada sıfır olduğu için optimumdur.