08/04/2021

ZAMAN SERİLERİ ANALİZİ

Rasgele değişken: bir deneme sonuçlanmadan alacağı değer kestirilemeyen fakat ancak deneme sonuçlandığı zaman aldığı değer gözlenen sayısal bir büyüklüktür. Bu sayısal büyüklük $X, Y, Z, \ldots$ gibi büyük harflerden biri ile gösterilecektir

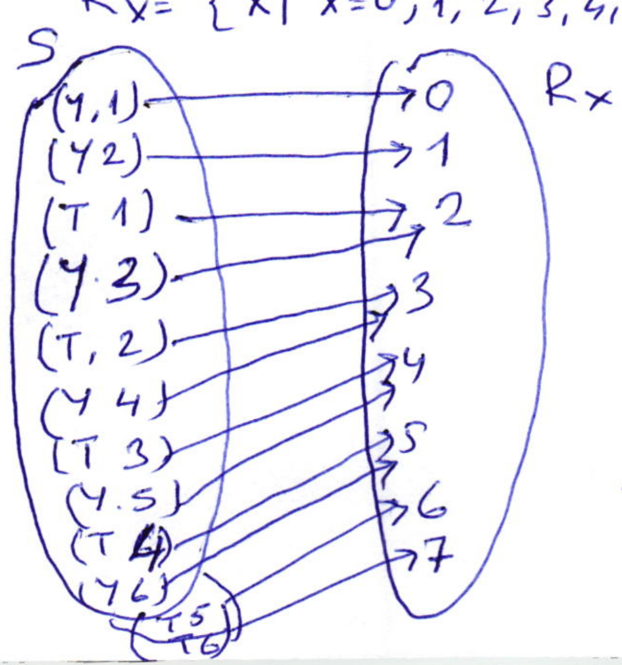
<u>Örnek</u> Bir çift tavla zarı atılıyor. Ve gelen sayıların toplamı X ile gösteriliyor. X'in alabileceği bütün x değerlerinin kümesi (Range)

$$R_X = \{X \mid x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

zar atılmadan önce X'in hangi x değerini alacağı kestirilemez Ancak zar atıldıktan sonra X'in rasgele olarak aldığı x değeri gözlenir.

<u>Örnek:</u> Bir madeni para ile bir tavla zarı birlikte atılıyor para tura gelirse zarın bir fazlası yazı gelirse bir eksiği X ile gösteriliyor. X'in alabileceği x değerler kümesi

$$R_X = \{X \mid x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



örnek uzay

X rasgele değişkeni

S, örnek uzayından

R_X kümesine bir fonksiyondur.

X rasgele değişkeninin alabileceği x değerlerinden oluşan R_x kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta ise bu X rasgele değişkeni kesiklidir.

X rasgele değişkeninin alabileceği x değerlerinin oluşturduğu R_x, kümesi, bir aralık yada aralıklar kümesi ise X rasgele değişkeni süreklidir.

OLASILIK FONKSIYONU

Tanım X rasgele değişkeninin alabileceği x değerlerine $f(x)$ olasılıklarını atayan f fonksiyonuna olasılık fonksiyonu denir. Olasılık fonksiyonu $R_x$den $[0,1]$ aralığındaki gerçel sayılar kümesine bir fonksiyondur.

$$R_x \xrightarrow{f} [0,1]$$

örnek: üç tane madeni para birlikte atılıyor. ve turaların sayısı X rasgele değişkeni olarak tanımlanıyor. Olasılık fonksiyonunu oluşturunuz.

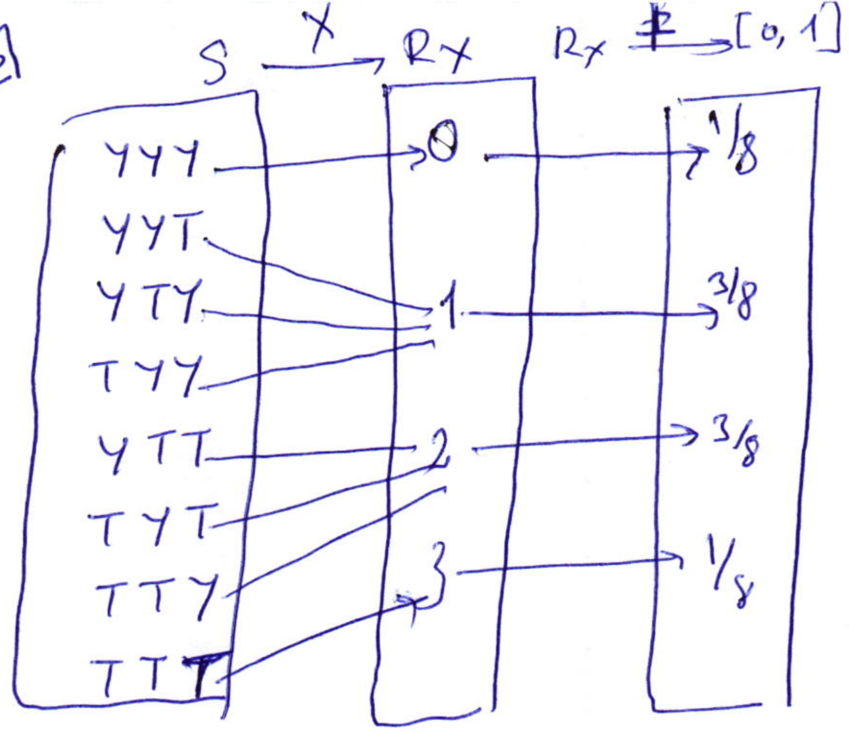
önce bir ağaç diyagramı çizmi

$$S = \{ (YYY), (YYT), (YTY), (Y,T,T), (TYY) (TYT)$$
$$(TTY), (T,T,T) \}$$

$P(Y) = 1/2 \qquad P(T) = 1/2$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/8$ olasılığı atanır.

X rasgele değişkeninin alabileceği x değerlerinin oluşturduğu R_x kümesi ve f olasılık fonksiyonu aşağıdadır.



olasılık fonksiyonu

X	0	1	2	3
$f(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sum f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>örnek</u>: $f(x) = \frac{2x}{k(k+1)} \quad (x = 1, 2, \dots, k)$

Bir olasılık fonksiyonu mudur?

$\forall x \geq 0$ için $f(x) \geq 0$

2) $\sum_{k=1}^{k} f(x) = \frac{2}{k(k+1)} \sum x = \sum_{x=1}^{k} \frac{2}{k(k+1)} \sum_{x=1}^{k} x = \frac{\cancel{2}}{k(k+1)} \frac{k(k+1)}{\cancel{2}} = 1$

bu durumda $f(x)$ bir olasılık fonksiyonudur.

<u>örnek</u>

$$f(x) = \begin{cases} 2kx & x = 1, 2, 3 \\ k(3+x) & x = 4, 5 \\ 0 & \text{diğer } x \text{ler için} \end{cases}$$

4

1) f'nin bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için k hangi değeri almalı

2) Elde edilecek olasılık fonksiyonundan yararlanarak $P(X=3)$, $P(X=5)$, $P(X=8)$, $P(X\geq 2 \mid X\leq 4)$ olasılıklarını hesaplayın.

1) $k\geq 0$ olmak koşuluyla $f(x)\geq 0$ koşulu sağlanır.

$$\sum f(x) = \sum_{x=1}^{3} 2kx + \sum_{x=4}^{5} k(3+x) = 1 \text{ olmalı}$$

$$2k(1+2+3) + k(7+8) = 1$$

$$12k + 15k = 1$$

$$27k = 1$$

$$\boxed{k = 1/27}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{27}x & (x=1,2,3) \\ \frac{1}{27}(3+x) & (x=4,5) \\ 0 & \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{cases}$$

2) $P(x=3) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ $\quad P(x=5) = \frac{8}{27}$

$$P(x\geq 2 \mid x\leq 4) = \frac{P(x\geq 2 \cap x\leq 4)}{P(x\leq 4)} = \frac{P(2\leq x\leq 4)}{P(1)+P(2)+P(3)+P(4)}$$

$$= \frac{\frac{4}{27}+\frac{6}{27}+\frac{7}{27}}{P(1)+P(2)+P(3)+P(4)} = \frac{17/27}{19/27} = 17/19$$

$$\frac{2}{27}+\frac{4}{27}+\frac{6}{27}+\frac{7}{27}$$

5 Beklenen değer

X rasgele değişkenin beklenen değeri $E(x)$ ile gösterili. Ve olasılık fonksiyonu f ile gösterildiğine göre kesikli bir X rasgele değişkeninin n beklenen değeri

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

X	0	1	2	3
$f(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$$\mu = E(x) = 0.\frac{1}{8} + 1.\frac{3}{8} + 2.\frac{3}{8} + 3.\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

Dağılım fonksiyonu

X	x_1	x_2	,,,,	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

olsun

Tanım X rasgele değişkeni için $F(x)$ dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$ eşitliği ile tanımlanır.

Örnek

Bir çift tavla zarı atılıyor. Ve gelen sayıların toplamı X rasgele değişkeni olarak tanımlanıyor. $f(x)$ olasılık fonksiyonunu ve $F(x)$ dağılım fonksiyonunu bulunuz

olasılık fonksiyonu

X	2	3	4	6	7	8	9	11	12
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$2/36$	$1/36$

$F(2) = \frac{1}{36}$ $\quad F(3) = F(2) + \frac{2}{36} = 3/36$ $\quad F(4) = F(3) + \frac{3}{36} = \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$

$\boxed{6}$ $F(5) = F(4) + \frac{4}{36} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$ $F(6) = F(5) + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$

$F(7) = F(6) + \frac{6}{36} = \frac{15}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36}$ $F(8) = F(7) + \frac{5}{36} = \frac{21}{36} + \frac{5}{36} = \frac{26}{36}$

$F(9) = F(8) + \frac{4}{36} = \frac{26}{36} + \frac{4}{36} = \frac{30}{36}$ $F(10) = F(9) + \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$

$F(11) = F(10) + \frac{2}{36} = \frac{33}{36} + \frac{2}{36} = \frac{35}{36}$ $F(12) = F(11) + \frac{1}{36} = \frac{36}{36}$

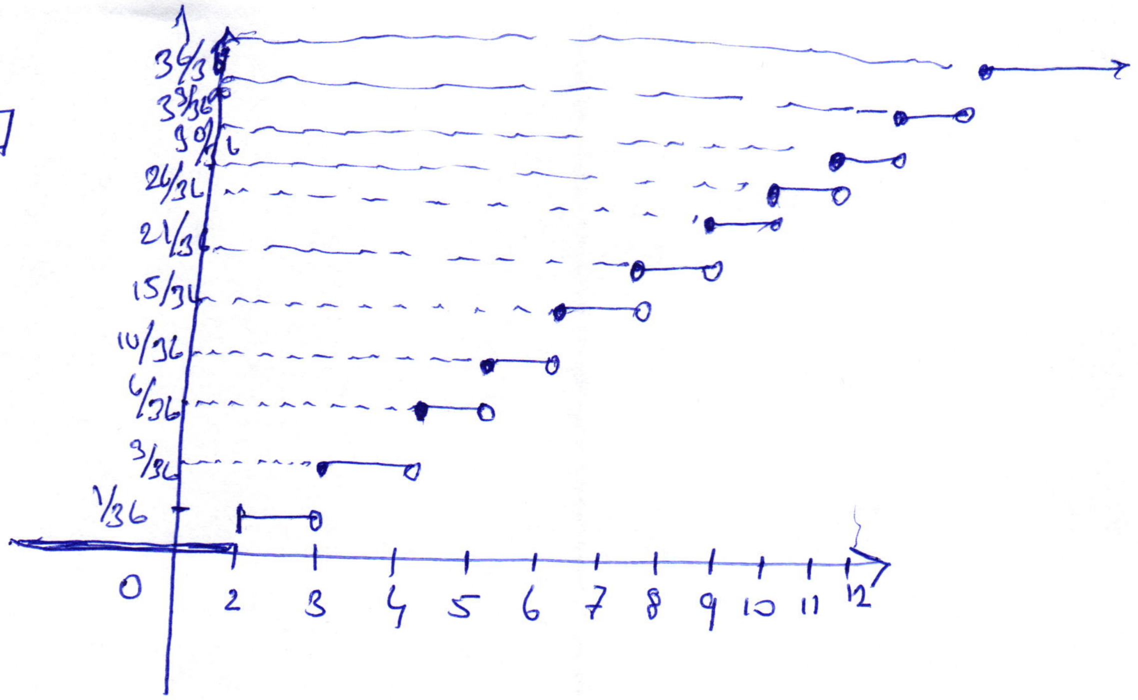
F dağılım fonksiyonunun aralığı $-\infty < x < +\infty$ $x < 2$ $F(x) = 0$

$x \geq 12$ $F(X) = 1$

Yukarıdaki sonuçlara dayanarak F dağılım fonksiyonunu oluşturalım ve grafiğini çizelim.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{6}{36} & 4 \leq x \leq 5 \\ \frac{10}{36} & 5 \leq x < 6 \\ \frac{15}{36} & 6 \leq x \leq 7 \\ \frac{21}{36} & 7 \leq x \leq 8 \\ \frac{26}{36} & 8 \leq x < 9 \\ \frac{30}{36} & 9 \leq x < 10 \\ \frac{33}{36} & 10 \leq x < 11 \\ \frac{36}{36} & 11 \leq x < 12 \\ 1 & x \geq 12 \end{cases}$$

7



Bu dağılım fonksiyonuna dayanarak

$P(X \leq 5)$, $P(X < 8)$, $P(X \leq 8)$ $P(X \leq 9.7)$ $P(X \leq 17)$

$F(5)=\frac{10}{36}$ $F(7)=P(X \leq 7)=\frac{21}{36}$ $F(8)=P(X \leq 8)=\frac{26}{36}$ $F(9)=\frac{30}{36}$ $F(17)=1$

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(4 \leq x \leq 9) = F(9) - F(4) = \frac{30}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36}.$$

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{27}x & (x=1,2,3) \\ \frac{1}{27}(3+x) & (x=4,5) \\ 0 & \text{diğer x'ler için} \end{cases}$$

olasılık fonksiyonu için X rasgele değişkenin beklenen değerini bulunuz.

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x\left(\frac{2}{27}x\right) + \sum_{x=4}^{5} x\,\frac{1}{27}(3+x)$$

$$= 1\,\frac{2}{27} + \frac{8}{27} + \frac{18}{27} + 4\,\frac{1}{27}\cdot 7 + 5\,\frac{1}{27}\cdot 8$$

$$= \frac{28}{27} + \frac{68}{27} = \frac{96}{27}$$

8 Varians ve standart sapma

X	x_1	x_2	....	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu f olsun

Varians σ_x^2 veya var(x) ile gösterilir.

$$Var(x) = E\left[(x-\mu_x)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)\,f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\mu_x x_i + \mu_x^2) f(x_i)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i)}_{E(x^2)} - 2\mu_x \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}_{E(x)=\mu_x} + \sum_{i=1}^{n}\mu_x^2 f(x_i)$$

$$= E(x^2) - 2\mu_x^2 \cdot \cancel{f(x)} + \mu_x^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}_{1}$$

$$= E(x^2) - \mu_x^2$$

X	-2	-4	6	4	2
$f(x)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

olasılık fonksiyonu için varians ve standart sapmasını hesaplayın.

$$\mu(x) = E(x) = -2\times0.1 - 4\times0.2 + 6\times0.4 + 4\times0.2 + 2\times0.1$$

$$\mu(x) = 2.4$$

$$E(x^2) = \sum x^2 f(x) = 4\times0.1 + 16\times0.2 + 36\times0.4 + 16\times0.2 + 4\times0.1$$

$$= 21.6$$

$$Var\,X = E(x^2) - \mu_x^2 = 21.6 - (2.4)^2 = 15.84 \qquad \sigma = \sqrt{Var X}$$

$$3.98 = \sigma = \sqrt{15.84}$$