

OYUNLAR TEORİSİNE GİRİŞ

Oyunlar her oyuncunun rakibinin hareketleri hakkında bilgi derecesi ve cinsine göre de sınıflandırılabilir. Eğer bir oyunda her oyuncu her hamleyi yaparken daha önce yapılmış olan bütün kişisel yada kâlih hareketlerinin sonuçlarını biliyorsa tam bilgili oyun söz konusu olur. Tam bilgili olmayan oyunlarda oyuncular böyle bir tam bilgiden Yoksundurlar. Satranç ve dama tam bilgili poker ise tam bilgili olmayan oyunlara örnek gösterilebilir.

Oyunları tekrar sınıflandıralım:

Temel sınıflandırma:
 → 1) şans oyunları
 → 2) strateji oyunları

Oyuncu Sayısına göre
 → 1) 2 kişili oyunlar
 → 2) n kişili oyunlar

Oyunun sayısal sonucuna göre
 → 1) sıfır toplamli oyunlar
 → 2) Sabit toplamli oyunlar
 → 3) Sabit toplamli olmayan oyunlar.

Oyuncuların strateji sayılarına göre
 → 1) Sonsuz oyunlar
 → 2) Sonlu oyunlar.

Rakibinin Stratejisi hakkında bilgi derecesi ve cinsine göre
 → 1) Tam bilgili oyunlar
 → 2) Tam bilgili olmayan oyunlar.

2

iki kişili sıfır toplamlı oyunlar

Bir oyunda iki kişi varsa iki kişili bir oyundur. İki kişili bir oyunda oyuncuların kazançları toplamı sıfır ise oyun iki kişili sıfır toplamlıdır.

İki kişili sıfır toplamlı oyunların en önemli varsayımı her oyuncunun rakibinin kendisinin hangi stratejiyi seçeceği hakkında tam bilgisinin olmasının yanısıra kendisi için en iyi olan stratejiyi seçme şansına sahip olduğu varsayımıdır. Bu bölüme iki-kişili sıfır toplamlı sonlu oyunlar üzerinde durulacaktır.

İki kişili sıfır toplamlı sonlu bir oyunda

a) Bir satır oyuncusu, diğeri sütun oyuncusu olarak isimlendirilen iki oyuncu vardır.

b) Satır oyuncusu için M , sütun oyuncusu için n adet mümkün strateji vardır. Bu oyun $m \times n$ oyun olarak isimlendirilir.

c) Satır oyuncusunun stratejileri $R_1, R_2, \dots, R_m$ ile sütun oyuncusunun stratejileri $C_1, C_2, \dots, C_n$ ile gösterilsin. Oyuncuların strateji seçimlerinin farklı birleşimlerinden sonuçlanan kazanç yada kayıplarının bilindiği varsayalım.

Satır başlıkları satır oyuncusunun R_i stratejileri, sütun başlıkları sütun oyuncusunun C_j stratejileri olmak üzere bu değerler bir tablo (matris) şeklinde yazılabilir. Bu tabloya ödenil, ödeme kazanç yada oyun matrisi denir.

3

sütun oyuncusunun stratejileri	sütun oyuncusunun stratejileri					
	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
R_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Sıfır toplamlı bir oyunun matrisi genellikle olarak yalnızca oyunculardan birinin kazancı ile açıklanır. Buna göre oyunculardan birinin kazanç matrisi diğer oyuncunun kazanç matrisinden belirlenebilir. Bir oyuncunun kazanç matrisinin tüm elemanlarının ters işaretli olarak değişen matris diğer oyuncunun kazanç matrisidir.

Satır oyuncusunun R_i , sütun oyuncusunun c_j gibi belirli bir stratejiyi kabul ettiklerini varsayalım. Oyun matrisi satır oyuncusuna göre düzenlenmiş ise A_{ij} satır oyuncusunun kazancı sütun oyuncusunun ise kaybını gösterir.

Örneğin satır oyuncusunun iki (R_1, R_2) sütun oyuncusunun (C_1, C_2, C_3, C_4) stratejisinin bulunduğu bir oyunun, satır oyuncusunun kazançlarına göre düzenlenen matrisi aşağıdadır. Oyuncuların stratejilerinin değişik birleşimlerinden herhangi iki tanesi için oyuncunun kazanç ve kayıplarını bulunuz.

4

Satur oyuncusu nun stratejileri	Satur oyuncusunun stratejileri			
	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1	3	-2	5	6
R_2	2	1	-2	4

Gözüm: saturdaki oyuncunun R_2 'yi saturdaki oyuncunun C_3 'ü seçmesi durumunda satur oyuncusunun kazancı a_{23} olur. $a_{23} = -2$ olduğundan satur oyuncusu için negatif kazanç, yani kayıp, satur oyuncusunun da negatif kayıp, yani kazanç söz konusudur. Satur oyuncusu R_1 , satur oyuncusunun C_4 'ü seçmesi durumunda satur oyuncusunun kazancı a_{14} kadar yani 6 birim olacaktır. Bu durum satur oyuncusunun 6 birim kaybetmesi demektir.

Tam (Pür) stratejiler: Bazı oyunlarda, oyuncular dan biri, diğerinin uygulayacağı stratejileri dikkate almaksızın tek bir stratejiye yönelecektir. Bu durum pür (tam) strateji olarak bilinir.

İki kişili sıfır toplamı oyunları oynama kuralı bu varsayıma dayanır. Söz konusu oyunlar ile ilgili kuram John von Neumann ve Oscar Morgenstern tarafından geliştirilmiştir. Aşağıdaki örnekle bu durumu açıklayalım.

5 Örnek Aşağıdaki örnekte tepe noktası olup olmadığını araştırınız.

sıra oyuncusunun stratejileri	sıra oyuncusunun stratejileri	
	Y_1	Y_2
X_1	4	6
X_2	-1	2

Çözüm

a) sıra oyuncusu X_2 'yi oynamaktansa her durumda X_1 'i oynamayı tercih edecektir.

b) sıra oyuncusu, sıra oyuncusunun X_1 'i tercih edeceğini bildiğinden daha az kaybetmek için Y_1 'i seçmelidir.

Bu durumda her bir oyuncu için bir tane strateji mevcuttur. Bu durum literatürde bir baskın strateji bulunması olarak adlandırılmaktadır. Yukarıdaki örnek için oyunun tepe noktası mevcut olup 4 birimdir.

Tepe (Eğer) Noktalı Oyunlar.

Tepe Noktası bulunan bir oyunda taraflardan birinin tepe Noktası dışında bir strateji seçmesi ancak kendi durumunu güçleştirmeye neden olur.

Örnek, oyuncuların herbirinin diğer stratejisinin bulunduğu 3×3 oyunun kazanç matrisi verilmiştir. Verilen kazanç matrisini dikkate alarak oyuncuların oyunu hangi stratejilerle oynayacağını belirleyiniz.

6

Satır oyuncusunun stratejileri	Sütun oyuncusunun stratejileri			Satır Enküçüğü
	C_1	C_2	C_3	
R_1	16	10	7	7
R_2	8	9	4	4
R_3	9	1	2	1
Sütunun En büyüğü	16	10	7	

Gözlem: Satır oyuncusu R_1 stratejisini seçerse sütun oyuncusu C_3 stratejisini seçerek kendi kaybını dolayısıyla rakibinin kazancı mümkün olan en düşük düzeyde tutar. Bu değer tabloda eklenen satır en küçüğü başlıklı sütunda gösterilen 7'dir. Satır oyuncusu ikinci stratejiyi seçmesi durumunda, Sütundaki oyuncu yine kendisi için en az (4) kayıp sağlayacak olan üçüncü stratejiyi seçecektir. Satır oyuncusu 3cü

stratejiyi seçerse, sütun oyuncusu ikinci stratejiyi seçerek yine kendi kaybını dolayısıyla rakibinin kazancını en düşük kazanç olan 1 ile tutmayı başarır. Bu açıklamaların ortaya koyduğu gibi, Satır oyuncusu dikkatini satır en küçüklerinin en büyüğüne karşılık gelen strateji üzerinde yoğunlaştırmak durumundadır. Böylece kendisinin her stratejisi için rakibinin seçmiye olursa olsun. Rakibinin kendisine garanti ettiği en düşük kazanç en büyüktenis olur. kısaca $\max(7, 4, 1) = 7$. Satır oyuncusu için en iyi strateji R_1 dir.

7

Satır oyuncusunun strateji seçimiyle ilgili bu açıklamalar, Satır oyuncusunun en iyi hareketin satır en küçük değerlerinden en büyük olanını işaret ettiği stratejiyi seçmek olduğunu ortaya koymaktadır. Yukarıda açıklandığı gibi bu sütundaki oyunun ne yaparsa yapsın satırdaki oyuncusunun kazanacağından emin olduğu miktardır. Bu miktar oyunun alt değeri veya maxmin α ile gösterilen bu değere karşılık gelen stratejiye de maxmin strateji denir. Maxmin strateji Satır oyuncusunun en iyi stratejisidir. Tek bir stratejiye bağlı kalındığında α değeri satır oyuncusunun garantiliyeceği en büyük kazançtır.



problemi birde sütun oyuncusu açısından ele alalım. Sütundaki oyuncu C_1 stratejisini seçerse, Satırdaki oyuncu buna kendisine en yüksek kazancı (o sütunun en büyüğü) garanti eden birinci strateji ile karşılık verir. Sütun oyuncusunun ikinci stratejiyi seçmesi durumunda satır oyuncusu yine birinci stratejiyi seçerek ve kazancının en yüksek olmasını sağlayacaktır. Sütun oyuncusunun üçüncü stratejiyi seçmesi durumunda satır oyuncusu için en iyi strateji yine kendisine en yüksek kazancı garanti eden birinci satırdaki strateji olur. Satır oyuncusunun kazancı sütun oyuncunun kaybına eşit olduğundan, Sütun oyuncusu en düşük düzeyde tutmak için, Sütun en büyüklerinin en küçüğünü sağlayan stratejiyi seçmek durumundadır. Sütun en büyükleri kazanç matrisinin en alt satırında sütun en büyüğü başlığı altında gösterilmiştir. Sütun oyuncusunun strateji seçimiyle ilgili olarak yapılan bu açıklamalardan sütun oyuncusunun sütun en büyük değerlerinden en küçük olanının işaret ettiği stratejiyi seçmesi gerektiği anlaşılar. Bu durumda satırdaki oyuncu ne yaparsa yapsın sütundaki oyuncunun kaybı en az olur. Bu miktara oyunun üst değeri denir. ve ilk gösterilir. Bu karşılık gelen stratejiye Minimax strateji denir. Minimax strateji sütun oyuncusunun en iyi stratejisidir.

9) Stratejilerin kararlaşıldığı bazı oyunlar vardır. Bunlar alt ve üst değerlerinin eşit olduğu oyunlardır. Bütün oyunlara tepe noktalı oyunlar denir. Tepe noktası aynı zamanda bir denge noktası olup her bir oyuncu denge durumunu bozamaz. $\alpha = \beta$ ise bunların ortak değerine oyun değeri denir, oyunun değeri α ile gösterilir. Oyun matrisinin satır oyuncusuna göre düzenlendiğini kabul edelim. α pozitif ise oyun sonunda satır oyuncusunun ortalama α birim kazancına sahip olurken oyun satır oyuncusu için çekicidir. α negatif ise oyun sonunda satır oyuncusu α birim kaybedeceğinden oyun sütun oyuncusu için çekicidir. Herhangi bir oyunun birden fazla tepe noktası olabileceği gibi hiçbir tepe noktası bulunmayabilir. Tepe noktasının en önemli özelliği oyuncuların en iyi stratejilerine sadık kalmaları gerekliliği işaret etmesidir. Başka bir ifade ile oyuncuların herhangi bir rakibi en iyi stratejisine sadıkken kendisi en iyi stratejisinden ayrılır ise en iyi kazanda kazancı aynı kalır. Genellikle azalır. Şu halde satır oyuncusu en iyi stratejisini oynarken, sütun oyuncusu en iyi stratejisini oynamaktan vazgeçmekle satır oyuncusunun kazancını azaltmaz. Rakibinin kazancı en kötü ihtimalle aynı kalır. Genellikle artar.

[10] Benzer şekilde sütun oyuncusu en iyi stratejisini oynarken Satır oyuncusu kendisinin en iyi stratejisinden vazgeçerse Sütun oyuncusunun kaybı dolayısıyla Satır oyuncusunun kazancı asla artmaz genellikle de azalır. Tepe Noktalı bir oyunda oyuncuların en iyi stratejilerinin bir kararlılığı vardır. En iyi stratejiler çifti bu anlamda bir derece konumudur. Bu koşullarda ön bilginin oyuncularından hiçbirine yarar sağlanmadığından kaydedelim. Tepe Noktalı bir oyunda her iki tarafta kendi en iyi stratejilerine bağlanırsa ortalama kazanç oyunun değeri olan ve hem alt hemde üst değere eşit olan v olacaktır.

Yukarıdaki örnek problem esas alındığında Sözgelimi Sütun oyuncusu en iyi stratejisi olan 3cü stratejisini oynarken, satır oyuncusu kendi için en iyi olan birinci stratejisinden vazgeçerse kazancı 2ci stratejiyi seçmesi durumunda en fazla 4',; 3cü stratejiyi seçmesi durumunda en fazla 2 olur.

Benzer şekilde Satır oyuncusu en iyi stratejisini oynarken Sütun oyuncusu kendisi için en iyi olan üçüncü stratejiden vazgeçerek ^{birinci stratejiyi} oynarsa kaybı 7 yerine 16, ikinci stratejiyi seçerse 10 birim olur.

Örnek Aşağıdaki örnekte tepe Noktası olup olmadığının inceleyiniz.

		II oyuncu				
		stratijler	1	2	3	Min
I oyuncu	A	-3	-1	7	-3	
	B	2	0	4	0	
	C	9	-2	-6	-6	
	max	9	0	7	0=0	

1 oyuncu B; ikinci oyuncu 2 stratejisini oynayacak oyun değeri sıfırdır.