06. 04. 2020

OPTIMIZASYON TEKNIKLERİ

Eşitlik kısıtları altında optimizasyon

$\mathbb{R}^n$ de $f(x)$ ve $g_i(x)$; $(i=1,\dots,k)$ birinci mertebeden sürekli türevlere sahip bir fonksiyon olsun. $f(x)$'in $g_i(x)=0$ $i=1,\dots,k<n$ kısıtları altında x^* gibi bir minimum çözümü varsa $\{\nabla g_i(x^*);\ i=1,\dots,k\}$ lineer bağımsız bir küme olmak üzere

$$g_i(x^*)=0 \quad i=1,\dots,k \qquad (1)$$

$$\nabla f(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \nabla g_i(x^*)=0 \qquad (2)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada λ_i $(i=1,\dots,k)$ lere lagrange çarpanları denir.

(1) yapısındaki kısıtlar her bir eşitlik için k tanedir.

(2) yapısındaki denklem n tane değişken olduğu için n tanedir. Toplam n+k tane eşitlik, n+k tane de değişken olacaktır.

İspat
$$\left.\begin{array}{l}\min f(x)\\ g_i(x)=0;\ i=1,\dots,k<n\end{array}\right\}$$ problemini çözmek istiyoruz.

Kısıt sayısı değişken sayısından küçük olmalı. Büyükse ya lineer bağımlıdır. Kısıtlar elenir ya da uygun bölge oluşmaz yani çözümden bahsedilmez.

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x)$$ fonksiyonunu kuralım.

bu fonksiyona Lagrange fonksiyonu denir.

$$L(x^*,\lambda)=f(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \underbrace{g_i(x^*)}_{0} \qquad L(x^*,\lambda)=f(x^*) \text{ olacak}$$

2

ve L ile f aynı minimum değerlere sahip olacaktır.

L'nin minimum noktasını bulmak istersek

$$\nabla L(x,\lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x)$$

$$\nabla L(x^*,\lambda) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

L ile f arasında; L'yi min yapan değeri bulduğumuzda f'i minimum yapan değeri bulmuş oluruz.

Bu Lagrange çarpanları λ_i $(i=1,..,k)$ Lineer programlamada simpleks çarpanlarına karşılık gelmektedir.

2. Mertebe koşulları

$\{\nabla g_i(x^*) ;\ i=1,..,k\}$ lineer bağımsız bir küme

$$H(x^*) = \{ h \mid \nabla g_i(x^*) h = 0 ;\ i=1,..,k \quad h \in \mathbb{R}^n \}$$

x^* dan ilerlenebilir yönler kümesi olmak üzere $\nabla^2 f(x^*)$ Hessian matrisi $H(x^*)$ üzerinden pozitif definit olmalıdır. Yani $\forall h \in H(x^*)$ için

$$h' \nabla^2 f(x^*) h \geq 0 \text{ olmalıdır.}$$

ÖRNEK;

$\min f(x) = x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_1x_3$ fonksiyonunu $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ kısıtı üzerinde optimize ediniz.

Kısıt $g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

Lagrange fonksiyonu

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

$$L(x,\lambda) = x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_1x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3)$$

$\boxed{3}$ Birinci mertebe koşullar

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 3x_3 + \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_3 + \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_2 + 3x_1 + \lambda = 0 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \quad (4)$$

(1)-(2) $\quad x_2 - x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = x_1$

(4) de yerine konursa $x_1 = 3/2$

(2)-(3) çıkarılırsa $\quad -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$

$x_3 = x_1 + x_2$ (4) de yerine konursa

$2x_3 - 3 = 0 \quad x_3 = 3/2$ elde edilir.

(4) de $x_1 = 3/2 \quad x_3 = 3/2$ konduğunda $x_2 = 0$ elde edilir. bu değerleri λ'lı denklemlerin herhangi birinde koyarsa $\lambda = -9/2$ bulunur.

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 + 3x_3 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 2x_3 \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_2 + 3x_1$

2. ci mertebe koşul.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hessian Matris x'lere bağlı çıkmadığı için. ilerlenebilir yönü kullanmak durumundayız

$\boxed{4}$ $H(x^*) = \{ h \mid \nabla g(x^*) h = 0 \}$

$$\nabla g(x) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right] = [1, 1, 1]$$

$$\nabla g(x^*) h = [1, 1, 1] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = 0$$

$h_1 + h_2 + h_3 = 0$ elde edilir.

$$h' \nabla^2 f(x^*) h = [h_1, h_2, h_3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= [h_1 0 + h_2 + 3h_3,\ h_1 + 0h_2 + 2h_3,\ 3h_1 + 2h_2 + 0h_3] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= [h_2 + 3h_3,\ h_1 + 2h_3,\ 3h_1 + 2h_2] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= h_1h_2 + 3h_3h_1 + h_1h_2 + 2h_3h_2 + 3h_1h_3 + 2h_2h_3$$

$$= h_1h_2 + 3(-h_1-h_2)h_1 + h_1h_2 + 2(-h_1-h_2)h_2$$
$$+ 3h_1(-h_1-h_2) + 2h_2(-h_1-h_2)$$

$$= \cancel{h_1h_2} - 3h_1^2 - 3h_2h_1 + \cancel{h_1h_2} - 2h_1h_2 - 2h_2^2$$
$$- 3h_1^2 - 3h_1h_2 - 2h_2h_1 - 2h_2^2$$

$$= -6h_1^2 - 8h_1h_2 - 4h_2^2$$

$$= -2h_1^2 - 4h_1^2 - 8h_1h_2 - 4h_2^2$$
$$= -2h_1^2 - 4(h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2) = \underbrace{-2h_1^2 - 4(h_1+h_2)^2}_{<0}$$

Bulunan $x^* = (3/2, 0, 3/2, -9/2)$ çözümü maksimum çözümdür.

ÖRNEK 2 $\quad Minf(x) = x^2+y^2+z^2$

$$g_1(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$$

$$g_2(x) = x + y - z = 0$$

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)$$

$$= x^2+y^2+z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1\right) + \lambda_2(x+y-z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1 \frac{x}{2} + \lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda_1 \frac{y}{5} + \lambda_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_1 \frac{2z}{25} - \lambda_2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \quad (4)$$

$$x + y - z = 0 \quad (5)$$

(1)den $\quad x = -\dfrac{2\lambda_2}{4+\lambda_1}$

(2) den $\quad y = \dfrac{-5\lambda_2}{10+2\lambda_1}$

(3) den $\quad z = \dfrac{25\lambda_2}{50+2\lambda_1}$

Bunları (5) denklemde yazarsak

$\boxed{6}$

$$\frac{-2\lambda_2}{4+\lambda_1} - \frac{5\lambda_2}{10+2\lambda_1} - \frac{25\lambda_2}{50+2\lambda_1} = 0$$

$$\lambda_2 \left[\frac{-2}{4+\lambda_1} \frac{-5}{10+2\lambda_1} - \frac{25}{50+2\lambda_1} \right] = 0$$

a) $\lambda_2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$ olur ki (4) denklemi

sağlanmaz.

$$\frac{-2}{4+\lambda_1} \cancel{+} \frac{5}{10+2\lambda_1} - \frac{25}{50+2\lambda_1} = 0$$

$$-2(10+2\lambda_1)(50+2\lambda_1) - 5(4+\lambda_1)(50+2\lambda_1) - 25(4+\lambda_1)(10+2\lambda_1)$$

düzenlenirse

$17\lambda_1^2 + 245\lambda + 750 = 0$ elde edilir.

$\lambda_1^{(1)} = -\frac{75}{10}$ $\quad \lambda_1^{(2)} = -10$ gibi iki değer

elde edilir.

$\lambda_1 = -10$ için $\quad x = \frac{\lambda_2}{3} \quad y = \frac{\lambda_2}{2} \quad z = \frac{5\lambda_2}{6}$

bunları (4) de yerine yazarsak

$$\frac{1}{4}\frac{\lambda_2^2}{9} + \frac{\lambda_2^2}{4}\frac{1}{5} + \frac{25\lambda_2^2}{36}\cdot\frac{1}{25} - 1 = 0$$

$\frac{19}{180}\lambda_2^2 = 1 \qquad \lambda_2 = \mp\sqrt{\frac{180}{19}}$ elde edilir.

$\lambda_2^{(1)} = \sqrt{\frac{180}{19}} \qquad \lambda_2^{(2)} = -\sqrt{\frac{180}{19}}$ elde edilir.

$\boxed{7}$

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\frac{\lambda_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2+\frac{2\lambda_1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\frac{2\lambda_1}{25} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -10$ için $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$

Hessian matris x, y, z içermediği için.

$$H(x^*) = \{ h \mid \nabla g_i(x^*) h = 0 \quad i=1,2 \}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2x}{4} & \frac{2y}{5} & \frac{2z}{25} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2x}{4} h_1 + \frac{2y}{5} h_2 + \frac{2z}{25} h_3 = 0 \qquad (6)$$

$$h_1 + h_2 - h_3 = 0 \qquad (7)$$

$$\begin{bmatrix} h_1, & h_2, & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3h_1, & -2h_2 + 6/5\, h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = -3h_1^2 - 2h_2^2 + \frac{6}{5} h_3^2 \qquad (8)$$

$\boxed{8}$ $\lambda_1=-10$ $\lambda_2^{(1)}=\sqrt{\frac{180}{19}}$ değeri $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ değerleri

$\lambda_1=-10$ $\lambda_2=-\sqrt{\frac{180}{19}}$ değeri $x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}$ değerleri

$\lambda_1=-\frac{75}{10}$ $\lambda_2=\sqrt{}$ 〃 $x^{(3)}$ $y^{(3)}$ $z^{(3)}$ 〃

$\lambda_1=-\frac{75}{10}$ $\lambda_2=-\sqrt{}$ 〃 x^4 y^4 z^4 〃

herbiri (16 ve 17) denklemlerinde yerine konarak h_2 ve h_3 değeri h_1 değeri cinsinden hesaplanır. bulunan değerler 8 ifadesinde yerine konarak Hessian Matrisin definitliği elde edilir. yukarıdaki (4) nokta için definitlik tekrarlanır. dolayısıyla 4 noktanın türleri ortaya çıkar.