$\boxed{1}$

13.10.2020

Saat 9 – 11.50

Simpleks Yöntem

$$(1.1)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1M}x_M+\cdots+a_{1r}x_r+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2k}x_k+\cdots+a_{2M}x_M+\cdots+a_{2r}x_r+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{M1}x_1+a_{M2}x_2+\cdots+a_{Mk}x_k+\cdots+a_{MM}x_M+\cdots+a_{Mr}x_r+\cdots+a_{Mn}x_n&=b_M \end{aligned}$$

$$(1.2)\quad x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_M, \ldots x_r \ldots x_n \geq 0$$

$$(1.3)\quad \operatorname{opt} Z = c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k+\cdots+c_Mx_M+\cdots+c_rx_r+\cdots+c_nx_n$$

Lineer programlama problemini alalım. Yukarıdaki problem =lik kısıtları olduğu için standart formdadır. Bu problemi matris formunda yazmamızda mümkün

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}, \cdots & a_{1k}, \cdots & a_{1M}, \cdots & a_{1r}, \cdots & a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}, \cdots & a_{2k}, \cdots & a_{2M}, \cdots & a_{2r}, \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & a_{k2} \cdots & a_{kk} & a_{kM} \cdots & a_{kr} \cdots & a_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{M1}, & a_{M2}, & a_{Mk} \cdots & a_{MM} \cdots & a_{Mr}, & a_{Mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_M\\ \vdots\\ x_r\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_k\\ \vdots\\ \vdots\\ b_M \end{bmatrix}}_{b}$$

$$(1.1)\quad Ax=b$$

$$(1.2)\quad x^T \geq 0$$

$$(1.3)\quad Z = C^T x$$

2 matrisdeki

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = V_1, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = V_2, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} = V_k \ldots,$$

$$\begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{km} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{bmatrix} = V_m, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{kr} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{bmatrix} = V_r, \ldots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = V_n$$

ile gösterilir ise bir Lineer programlama problemin (1.1) kısıtlar kümesi $V_1, V_2, \ldots, V_k \ldots V_m, \ldots V_r, \ldots V_n$ olmak üzere n tane vektör içerir. Buna göre (1.1) kısıtlar kümesini $x_1V_1 + x_2V_2 + \ldots + x_kV_k + \ldots + x_mV_m + \ldots x_rV_r + \ldots x_nV_n = V_0$ seklinde yazmamız mümkündür. Burada

$$V_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ vektörüdür.

kısıt sayısı m tane olduğu için m tane lineer bağımsız vektör vardır. Bunlar $V_1 V_2 \ldots V_k \ldots V_m$ olsun. Bu vektörler bir taban oluşturur. V_r vektörüde taban vektörlerin dışında olduğundan Lineer bağımlıdır.

3

Lineer bağımlı vektör, Lineer bağımsız vektörlerin Lineer kombinezonu şeklinde yazılır. O halde

$$(1.4)\quad V_r = \alpha_{1r}V_1 + \alpha_{2r}V_2 + \dots + \alpha_{kr}V_k + \dots + \alpha_{mr}V_m$$

(1.1) kısıtlarından

$$(1.5)\quad V_0 = x_1V_1 + x_2V_2 + \dots + x_kV_k + \dots + \cancel{x_m}V_m$$

şeklinde yazılır. (V_m'den sonraki ($V_{m+1}, V_{m+2}, \dots, V_p, \dots V_n$) taban dışı vektörler oldukları için bunlara karşılık gelen $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$ değişkenleri sıfırdır.)

(1.4)'ü $\lambda > 0$ (reelsayısı) ile çarpıp (1.5)'den çıkarılır ise

$$V_0 - \lambda V_r = (x_1 - \lambda\alpha_{1r})V_1 + (x_2 - \lambda a_{2r})V_2 + \dots + (x_k - \alpha_{kr})V_k + \dots + (x_m - \alpha_{mr})V_m$$

Buradan

$$(1.6)\quad V_0 = (x_1 - \lambda\alpha_{1r})V_1 + (x_2 - \lambda a_{2r})V_2 + \dots + (x_k - \lambda\alpha_{kr})V_k + \dots + (x_m - a_{mr})V_m + \lambda V_r$$

Dolayısıyla tabanda m tane vektör olması gerekirken m+1 vektör oluşmuş oldu. Bu nedenle herhangi ~~değişkenini~~ vektörü tabandan çıkarmamız gerekiyor. Bir vektörün tabandan çıkması o vektörün önündeki değişkenin sıfır olmasıyla mümkündür.

a) Eğer $\alpha_{ij} \leq 0$ ise tabandaki vektörlerin önündeki değişkenlerin hepsi pozitif olur. Sıfır olma şansı olmadığı için tabanda bulunan vektörlerin hiç birini tabandan çıkaramayız.

4 a) şıkkı durum oluşur ise bu durumda sınırsız amaç fonksiyonu gerçekleşir.

b) En az bir $\alpha_{ij} > 0$ ise

$x_j - \alpha_{ij}\lambda \geq 0$ arasından. $i = 1, \dots m$ $j = 1, \dots m$

(1.7)

$$x_j \geq \alpha_{ij}\lambda \Rightarrow \lambda \leq \frac{x_j}{\alpha_{ij}} \Rightarrow \lambda = \min_j \frac{x_j}{\alpha_{ij}} = \frac{x_k}{\alpha_{ik}}$$

$j = k$ için gerçekleşsin. $\lambda \alpha_{ik} - x_k = 0$ olur.

bu durumda V_k vektörü tabandan çıkarı taban dışındaki V_r vektörü girerek tabandaki vektör sayısı yine m ~~tane~~ kalır. Bu da bizim istediğimiz durumdur.

Tabandan V_k vektörü çıkıp V_r vektörü girmekte.

Yeni Taban değişkenlerimiz.

(1.8)

$$x_1 \to x_1 - \lambda \alpha_{1r}$$
$$x_2 \to x_2 - \lambda \alpha_{2r}$$
$$\vdots$$
$$x_k \to 0$$
$$x_m \to x_m - \lambda \alpha_{mr}$$
$$x_r \to \lambda_r$$
$$x_{m+1} \to 0$$
$$\vdots$$
$$x_n \to 0$$

(1.9) $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k + \dots + c_r x_r + \dots c_m x_m$

haline gelir.

5 (1.8) deki eşitlikleri (1.9) da yerine koyarsak.

$$z = c_1(x_1 - \lambda\alpha_{1r}) + c_2(x_2 - \lambda\alpha_{2r}) + \cdots + c_m(x_m - \lambda\alpha_{mr}) + c_r\lambda$$

$$z = \underbrace{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m}_{z_0} - \lambda\underbrace{(c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \cdots + \alpha_{mr})}_{z_r} + c_r\lambda$$

(1.10) $z = z_0 + \lambda \underbrace{(c_r - z_r)}_{\text{simpleks çarpanı}}$

Taban vektörlerinin $c_r - z_r$ simpleks çarpanları sıfırdır. Taban dışı vektörlerin $c_r - z_r$ si ya pozitif yada negatiftir. Amaç fonksiyonumuzu maksimum yapmak istersek Simpleks çarpanlarının pozitif olduğu vektörü tabana sokarız. birden fazla pozitif simpleks çarpanı olan vektör var ise amaç fonksiyonunu daha çabuk optimuma götürmek için pozitif simpleks çarpanı en büyük olan vektörü tabana sokarız. Minimum amaç fonksiyonu için Simpleks çarpanı negatif olan vektörü tabana sokarız birden fazla negatif simpleks çarpanlı vektör var ise en küçük negatif simpleks çarpanı tabana sokarız.

Tabanda olmamasına rağmen simpleks çarpanı 0 olan vektörde vardır. Bu vektörü tabana soktuğumuzda amaç fonksiyonu değişmez, ancak çözüm değişeceği için alternatif çözüm oluşur.

Bunları anlatan bir örnek alalım.

6

örnek:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2 &\leq 2 \\ -x_1+x_2 &\leq 1 \end{aligned}\right\} (1.1) \quad x_1, x_2 \geq 0 \ (1.2) \quad \text{Mak } z = x_1+2x_2$$

Simpleks yöntemi ile çözelim.

$$x_1+x_2+x_3=2$$

$$-x_1+x_2+x_4=1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$\text{mak } z = x_1+2x_2$ şeklinde standart hale getirelim.
ve Tablo oluşturalım.

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	
			1	2	0	0	ORAN
j	c_j	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	
3	0	$x_3=2$	1	1	1	0	2/1
4	0	$x_4=1$	-1	1	0	1	1/1
c_j-z_j		$z_0=0$	1	2	0	0	
			c_1-z_1	c_2-z_2	c_3-z_3	c_4-z_4	

$(1.1)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Yukarıdaki Tabloda görüleceği gibi v_3, v_4 vektörleri

$v_3=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $v_4=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ oldukları için Taban vektörlerdir.

v_3 ve v_4'e karşılık gelen x_3 ve x_4 lerde

taban değişkenlerdir.

z_1, v_1 vektörünün bileşenleri ile taban değişkenlerin fiyatlarının çarpımının toplamıdır.

z_2, v_2 vektörünün bileşenleri ile taban değişkenlerinin fiyatlarının çarpımlarının toplamı

$\boxed{7}$ z_3, v_3 vektörünün bileşenleri ile taban değişkenlerinin fiyatlarının çarpımlarının toplamı,

z_4 ise v_4 vektörünün bileşenleri ile taban değişkenlerinin fiyatlarının çarpımlarının toplamıdır

Bu işlemler yapıldığında $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$ olduğu görülür. c_1, c_2, c_3, c_4'de tablodan görüldüğü üzere $c_1 - z_1$, $c_2 - z_2$, $c_3 - z_2$ ve $c_4 - z_4$ elde edilir.

Burada $c_1 - z_1 = 1$, $c_2 - c_2 = 2$ $c_3 - z_3 = 0$ $c_4 - z_4 = 0$

v_3 ve v_4 vektörleri taban vektörler olduklarından $c_3 - z_3$ ve $c_4 - z_4$'ün sıfır olması normaldir. v_1 ve v_2 vektörleride taban dışı vektörler olduklarından Simpleks çarpanları sıfırdan farklı ve ikiside pozitifdir optimuma daha çabuk ulaşmak için $c_2 - z_2 = 2$, $c_1 - z_1 = 1$ olduğundan Simpleks çarpanı 2 olan v_2 vektörünü tabana alırız. 1.7 formülünden de $\min_j \frac{x_j}{\alpha_{ij}}$ kullanarak temel değişkenlerle v_2 vektörünün bileşenlerini oranlarız. yani

$\frac{x_3}{\alpha_{32}} = 2$, $\frac{x_4}{\alpha_{42}} = 1$ en küçük oran 1 olduğundan.

4 nolu vektör tabandan çıkacak ve 2 nolu vektör tabana girer. Şuanda tabanda $v_3 v_4$ vektörleri vardı. Şimdi $(v_3 v_2)$ oldu (yeni taban)

Tablodan

$(v_3 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Tersini alalım.

$\boxed{8}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ · 2 satırın (-1)

katı 1 satıra eklenirse

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (1.11) tablosuyla çarpılacak

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	ØR
			1	2	0	0	
j	g	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	
3	0	$x_3 = 1$	2	0	~~1~~	-1	$1/2$
2	2	$x_2 = 1$	-1	1	0	1	$1/-1$
$c_j - z_j$		$z_0 = 2$	3	0	0	-2	

$\begin{pmatrix} y_2 & 0 \\ y_2 & 1 \end{pmatrix}$ (1.12)

yine Taban değişkenlerinin fiyatlarıyla v_0, v_1, v_2, v_3 ve v_4 vektörünün bileşenleri çarpılıp toplanırsa z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 değerleri elde edilir. ve fiyatlardan çıkarılırsa ~~~~ $c_1 - z_1$, $c_2 - z_2$, $c_3 - z_3$, $c_4 - z_4$ simpleks çarpanları elde edilir. Tablodan $c_1 - z_1 = 3$ olduğu görülüyor. Maksimum amaçlı problem olduğu için $c_1 - z_1$'e karşılık gelen v_1 vektörü tabana alınır. ve taban değişkenleri ile oran yapılırsa

$$\frac{x_3}{\alpha_{31}} = 1/2 \qquad \frac{x_2}{\alpha_{21}} = \frac{2}{-1}$$ olduğu görülür. $\alpha_{21} = -1$

olduğu için oran yapılmaz. Oran yapılmamasının sebebi tabandan çıkacak değişkenin değerinin sıfır olması gerekiyor. Ancak $\frac{x_2}{\alpha_{21}} = \lambda$

$x_2 = \lambda\alpha_{21}$ $\quad x_2 - \lambda\alpha_{21}$ yeni değişkeni

$\boxed{9}$ $x_2 \geq 0$ $\lambda > 0$ ve $\alpha_{21} < 0$ olduğundan $x_2 - \lambda\alpha_{21} > 0$ olur dolayısıyla V_2 vektörü tabandan çıkmaz bu nedenle α'nın negatif yada ~~pozitif~~ sıfır olması söz konusu vektörün tabandan çıkmamasını gerektirir. Bu nedenle α_{ij}'nin (yeni gelecek vektörün bileşenlerinin ~~bileşenlerinin~~ negatif yada sıfır olanlar ile x_j temel değişkeni oranlanamaz.) Buna göre $\frac{x_3}{\alpha_{31}} = \frac{1}{2}$ oranına karşılık V3 vektörü tabandan çıkar. yeni tabanımız (V_1, V_2) olur. (1.12) tablosundan $(V_1\ V_2)$ vektörlerinden oluşmuş matris alınıp tersi alınır ise

$$(V_1, V_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ilk satır 2'ye bölünür. 1. satır 2. satıra eklenir

$$(V_1, V_2)^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (V_1 V_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1,12) Tablosu $(V_1, V_2)^{-1}$ ile çarpılır ise

B		C	c_1 1	c_2 2	c_3 0	c_4 0	ORAN
i	c_i	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	
1	1	$x_1 = 1/2$	1	0	$1/2$	$-1/2$	
2	2	$x_2 = 3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	
$c_j - z_j$		$z_0 = 7/2$	0	0	$-3/2$	$-1/2$	

(1.13)

çözüm $x_1 = 1/2$ $x_2 = 3/2$

elde edilir. Simpleks çarpanları sıfır yada negatiftir $z^* = 7/2$ problem optimumdur dır

$\boxed{2}$ x_1: üretilecek çikolatalı kek miktarı.

$\frac{10}{}$ x_2: " vanilyalı kek miktarı

$Maks\ z = 2x_1 + x_2$

$20x_1 + 40x_2 \leq 8.60 \Rightarrow x_1 + 2x_2 \leq 24$

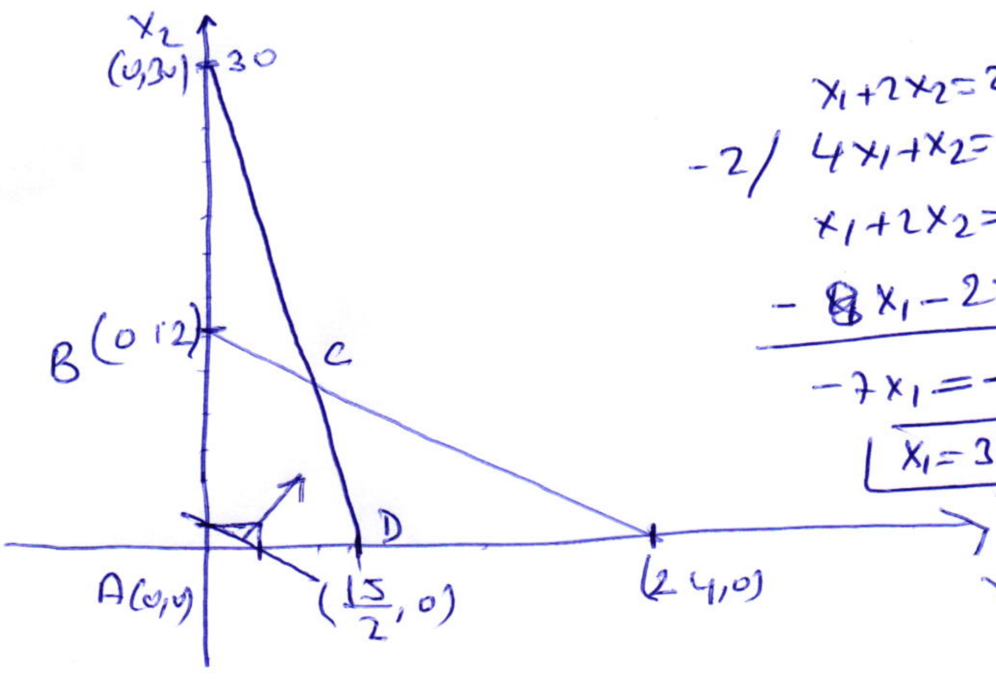
$4x_1 + x_2 \leq 30 \Rightarrow 4x_1 + x_2 \leq 30$

$x_1 + 2x_2 = 24$ $x_1 = 0$ $x_2 = 12$

$x_1 = 24$ $x_2 = 0$

$4x_1 + x_2 = 30$ $x_1 = 0$ $x_2 = 30$

$x_1 = \frac{15}{2}$ $x_2 = 0$



$x_1 + 2x_2 = 24$

$-2/\ 4x_1 + x_2 = 30$

$x_1 + 2x_2 = 24$

$-8x_1 - 2x_2 = -60$

$-7x_1 = -36$

$\boxed{x_1 = 36/7}$ $x_2 = \frac{66}{7}$

$z(A) = 0.2 + 0.1 = 0$

$z(B) = 2.0 + 12.1 = 12$

$z(C) = 2.\frac{36}{7} + 1.\frac{66}{7} = \frac{72+66}{7} = \frac{138}{7}$

$z(D) = 2.\frac{15}{2} + 1.0 = 15$