

1

13.11.2020
Saat 900

CPM ve PERT

Birbirinden bağımsız olarak geliştirilmiş iki yöntem olan CPM ve PERT'te, CPM faaliyet sürelerini deterministik olarak kabul ederken PERT'te bu sürelerin olasılıklı olduğunu kabul etmektedir. Burada sadece CPM'den söz edilecektir.

Şebeke gösterimi : Projenin her faaliyeti Projedeki gelişmenin yönünü işaret eden yönlü bağlantı (ok) ile gösterilir. Şebekenin düğümleri (olaylar diye de öncelik adlandırılır) Projenin farklı faaliyetleri arasında ~~bağ~~ ilişkisi kurar.

Şebekenin oluşturulması için üç kural vardır.

1. kural Şebekedeki her faaliyet yalnızca bir okla  gösterilir.

2. kural Her faaliyet iki ayrı ^{düğümle} (başlangıç ve bitiş)

tanımlıdır.

Aşağıda bir kukla faaliyetin A ve B gibi eş zamanlı iki faaliyetin gösteriminde nasıl kullanıldığı açıklanacaktır. Tanıma göre genellikle kesikli okla gösterilen bir kukla faaliyet zaman ve kaynak harcamayan bir faaliyettir. Kukla faaliyetin şebekeye eklenmesi Aşağıda gösterilen dört goldan biriyle olabilir. A ve B eş zamanlılığını korurken iki eş zamanlı faaliyete tek bir düğümlerle bağlanması 2. ci kuralın sağlanması için gereklidir.

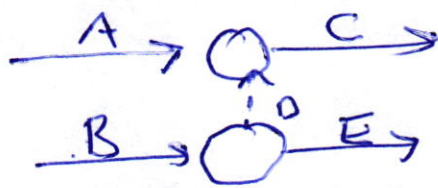
2

3. kural Doğru öncelik ilişkileri kurabilmek için Şebekeye her yeni faaliyet eklenirken aşağıdaki Sorular, Sorulmalıdır.

- (a) Şebekeye eklenecek faaliyetten hemen önce hangi faaliyetlerin gelmesi zorunludur?
- (b) Şebekeye eklenecek faaliyetli hangi faaliyetlerin izlemesi zorunludur.
- (c) Şebekeye eklenerek ~~faaliyet~~ eşzamanlı faaliyetle olarak hangi ~~faaliyet~~ faaliyetler bulunmaktadır?

Bu sorulara cevap verebilmek için faaliyetler arasında öncelik ilişkisini sağlayacak kukla faaliyetlerin kullanımı gerekebilir. Örneğin aşağıdaki önceliklerin karşılanmak olduğunu varsayalım.

- 1. C faaliyet A ve B'nin tamamlanmasından hemen sonra başlayabilir.
- 2. E faaliyet sadece B'nin tamamlanmasından hemen sonra başlayabilir.

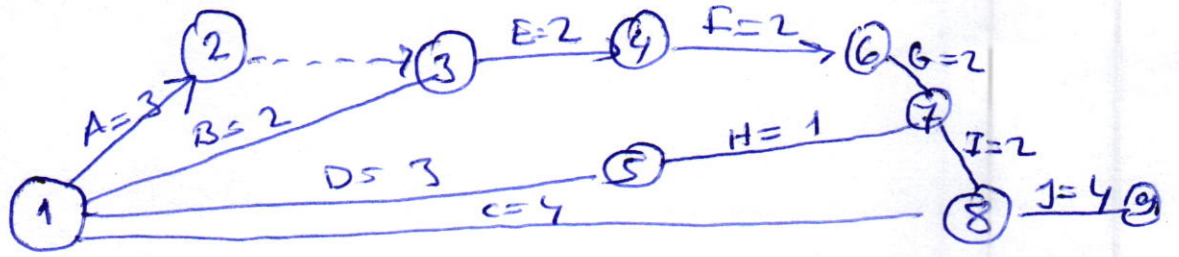


Faaliyet	Önceki faaliyetler	Süre
A	—	3
B	—	2
C	—	4
D	—	3

3

Devam →

Faaliyet	Öncelikli Faaliyet	Süre
E	A, B	2
F	E	4
G	F	2
H	D	1
I	G, H	2
J	C, I	4



Kritik yol hesaplamaları

CPM'nin uygulanması sonucunda Projenin zaman çizelgesi oluşturulur. Bu amaca kolayca varabilmek için aşağıdaki bilgiyi sağlayacak özel hesaplamalar gerçekleştirmemiz gerekir.

1. Projenin tamamlanması için gereken toplam süre
2. Projenin faaliyetlerinin kritik ve kritik olmayan faaliyetler diye sınıflandırılması

Başlangıç ve bitiş zamanları arasında gevşeklik (bolluk) olmayan faaliyete kritik faaliyet adı verilir. Aslında projeyi gecikmesiz bitirebilmek için her kritik faaliyet zamanında başlayıp bitmek zorundadır.

4

kritik olmayan faaliyet bazı çizelgeleme gevsene-
lerine izin verir. bylelikle faaliyetin başlangış
Zamanı belirli sınırlar içersinde ne alınsa
geerletirilebile bütünüyle projenin tamamlanma
Zamanında bir değişiklik olmaz.

olayı, gerekli hesaplamaları yapabilmek için
bazı faaliyetlerin bitip başkalarının başladığı andeki
bir nokta olarak tanımlanır. şebekedeki bir olay
bir düğüme karşılığ gelir.

$\square_j$: j olayının en erken gerçekleşme zamanı

Δ_j : j olayının en geç gerçekleşme zamanı

D_{ij} : (i, j) faaliyetinin süresi

ileriyre doğru hesaplama (en erken gerçekleşme
zamanları) $\square$. Burada hesaplama j düğünden
başlar ve n.ci düğüme kadar yinelenerek
ilerler.

Başlangış adımı: Projenin 0 zamanında başladığını
nı göstermek için $\square_1 \equiv 0$ olarak al.

j.ci genel adım: $p, q, \dots, u$ düğümleri $(p, j), (q, j)$
 $\dots (u, j)$ gelen faaliyetleriyle j.düğüme
doğrudan bağlı olduğu verilmişse ve $p, q, \dots, u$
olaylarının (düğümlerinin) en erken gerçekleşme
zamanları daha önceden hesaplanmişsa j olayının
en erken gerçekleşme zamanı şöyle
hesaplanır.

5

$$\square_j = \max \{ \square_p + D_{pj}, \square_q + D_{qj}, \dots, \square_v + D_{vj} \}$$

n ci düğümdeki $\square_n$ hesaplandığında ileriye doğru hesaplama tamamlanmış olur. Tanıma göre $\square_j, j$ ci düğüm için en uzun yolu (süreyl) gösterir.

Geriye doğru hesaplama: (En geç gerçekleşme zamanları) Δ
ileriye doğru hesaplama tamamlandıktan sonra n düğümde geriye doğru hesaplama başlar. Ve yinelenerek 1. düğüme geri döner.

Başlangıç adımı: Projenin en son olayının en erken ve en geç gerçekleşme zamanının aynı olduğunu gösterecek şekilde $\Delta_n = \square_n$ olarak belirle.

j ci genel adım: $p, q, \dots, v$ düğümlerinin $(j, p), (j, q), \dots, (j, v)$ çıkan faaliyetleriyle j düğüme doğrudan bağlı olduğu verilmişse ve $p, q, \dots, v$ olaylarının en geç gerçekleşme zamanları daha önceden hesaplanmışsa j olayının en geç gerçekleşme zamanı şöyle hesaplanır.

$$\Delta_j = \min \{ \Delta_p - D_{pj}, \Delta_q - D_{jq}, \dots, \Delta_v - D_{jv} \}$$

Geriye doğru hesaplama 1ci düğümdeki Δ_1 hesaplandığında tamamlanır.

Önceki hesaplamalar esas alındığında bir (i, j) faaliyeti aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa kritik faaliyet olacaktır.

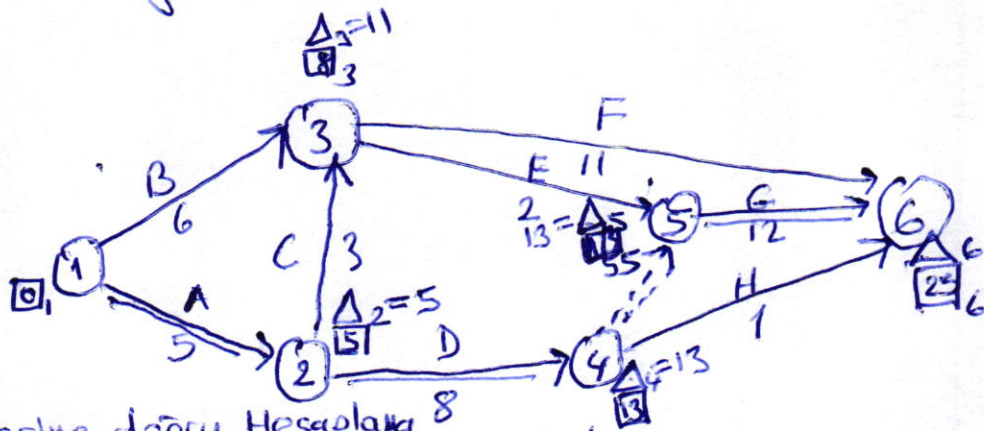
- 1) $\Delta_i = \square_i$
- 2) $\Delta_j = \square_j$
- 3) $\Delta_j - \Delta_i = \square_j - \square_i = D_{ij}$

[6]

Bu üç koşul şunları ifade etmektedir. 1. ve 2. Son olayların en erken ve en geç gerçekleşme zamanları eşittir. (1. ve 2. koşul) 3. Dijital jolayının en erken gerçekleşme zamanı ile i olayının en erken gerçekleşme zamanı arasındaki farka aynı zamanda jolayının en geç gerçekleşme zamanı ile i olayının en geç gerçekleşme zamanı arasındaki farka eşittir. (3. koşul) Bu üç koşulu sağlamayan faaliyet kritik olmayan faaliyettir.

Şebekenin kritik faaliyetleri başlangıçtan bitişe tüm şebekeyi kapsayan kesintisiz bir yol oluşturmak zorundadır.

Örnek Aşağıdaki şebekenin kritik yolunu belirleyin.



İleriye doğru Hesapları

1. düğüm $\square_1 = 0$ olarak belirlenir

2. düğüm $\square_2 = \square_1 + D_{12} = 0 + 5 = 5$

3. düğüm $\square_3 = \max \{ \square_1 + D_{13}, \square_2 + D_{23} \} = \max \{ 0 + 6, 5 + 3 \} = 8$

4. düğüm $\square_4 = \square_2 + D_{24} = 5 + 8 = 13$

5. düğüm $\square_5 = \max \{ \square_3 + D_{35}, \square_4 + D_{45} \} = \max \{ 8 + 3, 13 + 0 \} = 13$

6. düğüm $\square_6 = \max \{ \square_3 + D_{36}, \square_5 + D_{56}, \square_4 + D_{46} \} = \max \{ 8 + 11, 13 + 12, 13 + 1 \} = 25$

7

Hesaplamalar projenin 25 günde tamamlanacağını göstermektedir.

İleriye Doğru hesaplama

6 düğüm $\Delta_6 = \square_6 = 25$ olarak belirlenir

5 düğüm $\Delta_5 = \Delta_6 - D_{56} = 25 - 12 = 13$

4 düğüm $\Delta_4 = \min \{ \Delta_6 - D_{46}, \Delta_5 - D_{45} \} = \min \{ 25 - 1, 13 - 0 \} = 13$

3 düğüm $\Delta_3 = \min \{ \Delta_5 - D_{35}, \Delta_4 - D_{34} \} = \min \{ 13 - 2, 25 - 11 \} = 11$

2 düğüm $\Delta_2 = \min \{ \Delta_4 - D_{24}, \Delta_3 - D_{23} \} = \min \{ 13 - 8, 11 - 3 \} = 5$

1 düğüm $\Delta_1 = \min \{ \Delta_3 - D_{13}, \Delta_2 - D_{12} \} = \min \{ 11 - 6, 5 - 5 \} = 0$

Doğru hesaplama Δ_1 her zaman sıfır bulan hesaplama-
dır. İleriye ve geriye doğru hesaplamalar yukarıdaki
şekilde gösterilmiştir. Kritik faaliyetlerin belirlenmesiyle
ilgili kurallar şebekeyi başlangıçtan (1. düğüm)

bitişine (6. düğüm) kapsayan kritik yolun $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$
ile tanımlandığını gösterir. Kritik faaliyetlerinin
sürelerinin toplamı $[1, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 6)]$ projenin

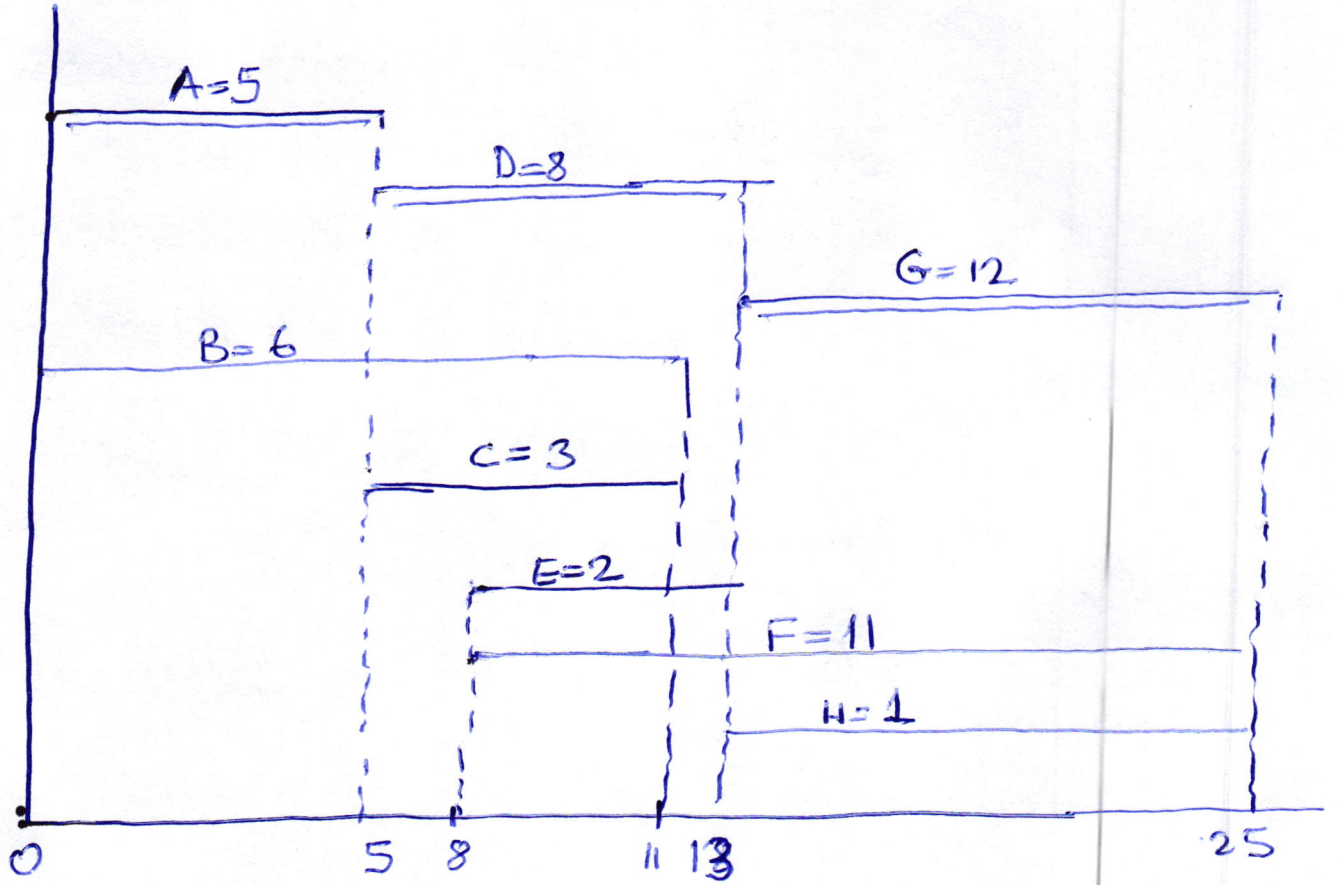
süresine (=25) güne eşittir. (4,6) faaliyetinin
kritik faaliyet için verilen üç koşulun ilk kısmını
sağladığı ($\Delta_4 = \square_4 = 13$ ve $\Delta_6 = \square_6 = 25$) fakat üçüncü
koşulu sağlamadığı ($\Delta_6 - \square_6 \neq D_{46}$) görülmüştür. Bu yüzden
bu faaliyet kritik faaliyet değildir.

Zaman çizelgesinin oluşturulması (i,j) faaliyeti

i için en erken başlama zamanını $\square_i$ ile en geç
başlama zamanını Δ_j ile gösterilir.

8

ZAMAN GİZELGESİ



Faaliyetlerin gizimi En erken başlama zamanı

En geç tamamlanma zamanına göre gizilmiştir.

çift çizgiler kritik yolu

Düz çizgiler kritik olmayan yolu göstermektedir.