1

FİNANS MATEMATİĞİ

28/04/2021

Giriş

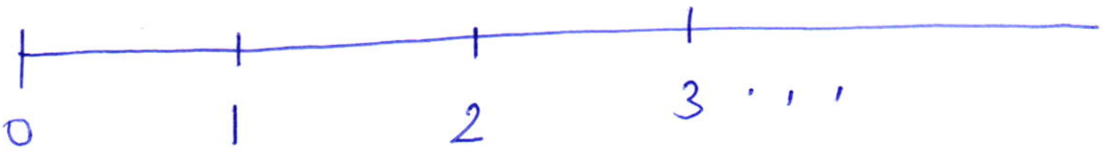
Eşit zaman aralıklarıyla, bir dizi biçiminde ödemelerin yapıldığı ödeme dizilerine annüite denir. Annüitlerde ödemeler biner yıl aralıklarla yapılabildiği gibi biner aylık yada ~~birer~~ günlük zaman aralıklarıyla da yapılabilir.

Annüiteler, ev kiraları, kredi taksit ödemeleri gibi belirli zaman aralıkları ile yapılan her türlü taksit ödemesi annüitelere örnek verilebilir. Annüiteler, kesin annüiteler ve koşullu annüiteler olmak üzere ikiye ayrılır. Kesin annüiteler, ödemesi belirli bir koşula bağlı olmayan ancak kesin olarak yapılması gereken ödemeleri kapsar. Örneğin kira ödemesi, kiralanan nesnenin kullanıldığı süre boyunca düzgün aralıklarla ödenecektir. Örneğin kredi borcu, borcu bitene kadar sürdürülür.

Koşullu annüitelerde ise ödeme belli bir koşul altında yapılır. Örneğin çalışanların ücret ödemeleri, emekli maaş ödemeleri ve sigorta prim ödemeleri bu tür ödemelere örnek olarak verilebilir. Burada ödeme yapmanın koşulu sırasıyla kişinin çalışması, emeklinin yaşıyor olması ve sigortalının yaşamasıdır. Finans sektöründe kullanılan annüiteler, ödemenin yapıldığı ana, hemen başlama ya da başlamamasına, tutara ve ödeme sıklığına bağlı olarak çok farklı şekillerde sınıflandırılabilir.

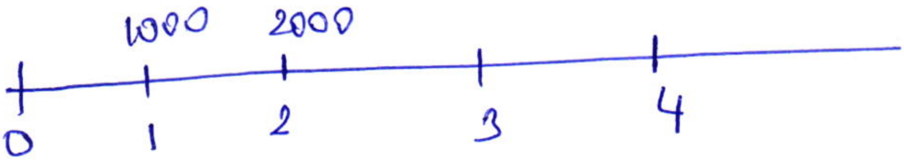
Annüitelerin anlaşılmasını kolaylaştırmak için zaman doğrusu gösterminden yararlanılacaktır.

$\boxed{2}$



yukarıdaki zaman doğrusunda $t=0$ noktası birinci dönemin başını $t=1$ noktası ikinci dönemin başını (birinci dönemin sonunu) $t=2$ noktası üçüncü dönemin başını (ikinci dönemin sonunu) ve $t=3$ noktası ise dördüncü dönemin başını veya üçüncü dönemin sonunu gösterir.

Örnek Birinci yılın sonunda 1000TL ve üçüncü yılın başında yapılan 2000TL'nin 5'ci yılın başındaki toplam birikimli değerini bulunuz. Not yıllık efektif faiz oranı %5 olarak alınacak



$$\text{Birikimli değer} = 1000\,(1+0.05)^3 + 2000\,(1+0.05)^2$$
$$= 1157.63 + 2205.00 = 3362.63$$

Annüitelerin bugünkü ve birikimli değerlerinin hesaplanmasını sağlayacak bir diğer önemli kavram ise geometrik seri ve bu serinin parçalı toplamıdır. Geometrik seri birbirini izleyen iki terim arasında, sabit bir oran bulunan sonsuz bir seridir. Ve $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ şeklinde gösterilir. Burada a, serinin ortak terimi,

3

r ise ortak oranını gösterir. $r \neq 1$ olmak koşuluyla, bir geometrik serinin ilk n terimi toplamı serinin parçalı toplamı olarak adlandırılır.

$$a+ar+ar^2+ar^3+...+ar^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1} ar^k$$

$$S_n = 1+\cancel{r}+\cancel{r^2}+...+\cancel{r^{n-1}}$$

$$rS_n = \cancel{r}+\cancel{r^2}+...+r^n$$

$$S_n - rS_n = 1-r^n$$

$$S_n(1-r) = 1-r^n$$

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$$ olur

n değeri sonsuza giderken, serinin yakınsak olması için r'nin mutlak değerinin ($|r|<1$) birden küçük olması gereklidir. Bu durumda geometrik serinin parçalı toplamı

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a.\frac{1}{1-r}$$ biçimini alır.

Örnek

$2V+3V^2+3V^3+...+3V^{10}$ geometrik serinin toplamını $V=0,5$ için bulunuz.

Verilen parayı aşağıdaki (zaman Sayı) doğrusu ile ifade edebiliriz.

4 Bu geometrik serinin ilk teriminden sonraki her terimini (2)+(1) şeklinde parçalıyarak ortak oranı v olan iki serinin toplamı şeklinde yazabiliriz.

$$2v + 3v^2 + 3v^3 + \dots + 3v^{10} = (2v + 2v^2 + \dots + 2v^{10}) + (v^2 + v^3 + \dots + v^{10})$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \rightarrow$ ilk parantezi

$$2v + 2v^2 + v^2 + 2v^3 + v^3 + \dots + 2v^{10} + v^{10}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \rightarrow$ ikinci parantezi

$$= 2v(1 + v + \dots + v^9) + v^2(1 + v + \dots + v^8)$$

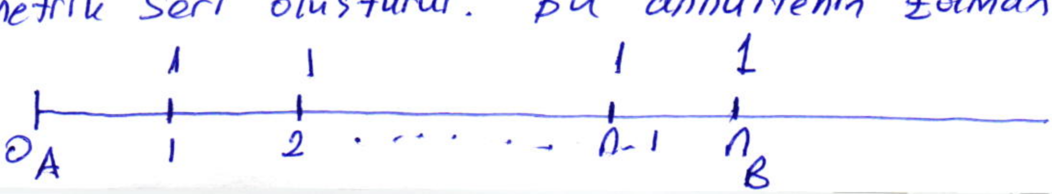
$$= 2v\left(\frac{1-v^{10}}{1-v}\right) + v^2\left(\frac{1-v^9}{1-v}\right)$$

Bu son işlemde $v = 0{,}5$ konursa

$= 1{,}998 + 0{,}4990 = 2{,}497$ elde edilir.

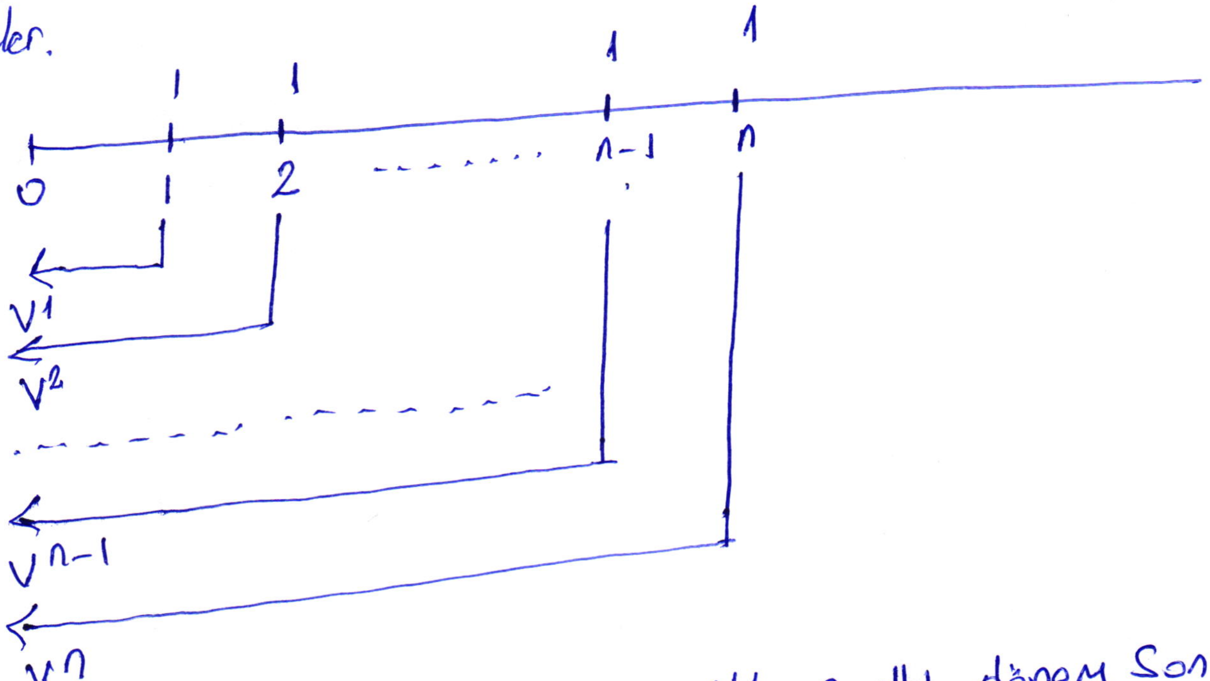
Annüiteler ilk ödemenin yapıldığı zamana bağlı olarak, dönem sonu ve dönem başı olarak ikiye ayrılır.

<u>Dönem sonu annüiteleri</u>: Bu tür annüitelerde ödemeler her dönemin sonunda yapılır. Örneğin her yılın sonunda 1 birimin ödendiği n yıllık bir dönem sonu annüitede; birinci yılın sonunda 1 birim; ikinci yılın sonunda 1 birim,, ve n'ci yılın sonunda 1 birim ödenir. Bu ödemeler bir geometrik seri oluşturur. Bu annüitenin zaman doğrusu



5 Bu annuiteye ilişkin zaman doğrusu t=0 noktasındaki A değeri $a_{\overline{n}|}$, t=n noktasındaki B değeri $s_{\overline{n}|}$ ile gösterilir.

$a_{\overline{n}|}$ her dönem sonunda bir birimlik ödeme yapılan annüitenin bugünkü değerini, $s_{\overline{n}|}$ ise bu annüitenin birikimli değerini ifade eder.



yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi n yıllık dönem sonu annuitenin bugünkü değeri her bir dönemin sabit ve ortak olan v iskonto faktörü ile t=0 noktasına çekilmiş değerlerin toplanmasıyla elde edilir. Bu iskonto faktörü faiz oranı olan i efektif faiz oranı olarak kullanılarak elde edilir.

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n$$

$$a_{\overline{n}|} = v\,(1 + v + \dots + v^{n-1})$$

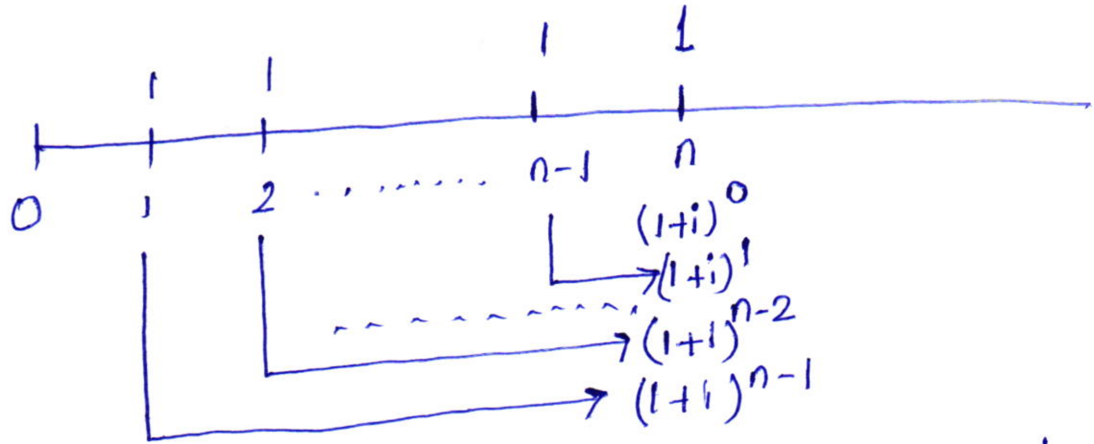
$$a_{\overline{n}|} = v\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right) \qquad 1-v = 1-(1+i)^{-1} = 1-\frac{1}{1+i} = \underbrace{\frac{i}{1+i}}_{d}$$

$$a_{\overline{n}|} = v\left(\frac{1-v^n}{d}\right) \qquad d = \frac{i}{1+i} = i\,(1+i)^{-1} = iv$$

$\boxed{6}$

$$a_{\overline{n}|} = v\left(\frac{1-v^n}{iv}\right) = \frac{1-v^n}{i} = A \quad \text{(Bugünkü değer)}$$

Benzer biçimde $t=n$ noktasındaki B değeri aşağıdaki şekilden hesaplanabilir.



yukarıdaki şekle göre 1 birim tutarındaki her bir ödemenin birikim faktörü olan $(1+i)$ ile elde edilen n noktasındaki birikimli değerlerin toplamıda bu annüitenin birikimli değerini vermektedir. Matematiksel olarak her bir dönem için efektif faiz oranı i olduğunda geometrik seri toplamı

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^1 + (1+i)^0 \quad (1)$$

$$(1+i)\,s_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i)^2 + (1+i)^1 \quad (2)$$

Taraf tarafa çıkarılırsa $((2)-(1))$

$$(1+i)\,s_{\overline{n}|} - s_{\overline{n}|} = (1+i)^n - (1+i)^0$$

$$i\,s_{\overline{n}|} = (1+i)^n - 1$$

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ elde edilir.

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ olduğuna göre

$\boxed{7}$

$$\frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{(1+i)^n-1}{i}\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{(1+i)^n-1}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{(1+i)^n-1}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$$

$$\frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{(1+i)^n-1}{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}} = (1+i)^n$$

$s_{\overline{n}|} = (1+i)^n \cdot a_{\overline{n}|}$ elde edilir.

$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i$ dır. Bunu ispatlıyalım.

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{\frac{(1+i)^n-1}{i}} + i = \frac{i}{(1+i)^n-1} + \underset{((1+i)^n-1)}{\frac{i}{1}} = \frac{i+i((1+i)^n-1)}{(1+i)^n-1}$$

$$= \frac{i+i(1+i)^n-i}{(1+i)^n-1} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} = \frac{i}{\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}-\frac{1}{(1+i)^n}} = \frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$$

pay ve payda $(1+i)^n$ ile bölünürse

$$= \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}_{a_{\overline{n}|}}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

Yukarıda verilen dönem sonu annüitelerin eşitlikleri her bir dönemde 1 birim tutarındaki ödemeler için elde edilmiştir. Eger her bir dönemdeki ödeme tutarı R birim ise

$$R\,s_{\overline{n}|} = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \qquad R\,a_{\overline{n}|} = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

elde edilir.

8 **Problem:** 5 yıl boyunca her 6 ayın sonunda 1000TL ödenen annüitenin bugünkü değerini 6 aylığa dönüştürülebilir yıllık nominal %10 faiz oranı için bulunuz.

Çözüm

6 aylığa dönüştürülebilen yıllık nominal faiz oranı %10 verildiğine göre bizim ödemelerimizde 6 ayda bir olduğuna göre 6 aylık faiz oranımız $\frac{\%10}{2} = 0.05$ olacaktır. 5 yılda 10 dönem vardır. $n = 10$ olur.

$$B.D = \underbrace{1000}_{R} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1000 \frac{1-(1+0.05)^{-10}}{0.05}$$

$BD = 7721.74$ TL olur.

Problem Ali 1 Ocak 2011 tarihinde yıllık efektif %10 faiz oranı ile 5 yıl vadeli 20.000 TL borç almıştır. Bu borcun ödenmesi için borç aldığı banka üç farklı teklifte bulunmuştur.

1) Borcun her yılın sonunda yapılacak eşit ödemelerle

2) Borcun ana para ve beş yıllık faiz tutarı beşinci yılın sonunda tek bir ödeme ile

3) Borcun ana parasının beşinci yıl sonunda tek bir ödeme ile borcun yıllık faiz tutarınınsa her yılın sonunda ödenmesi şeklindedir. Her ödeme seçeneğine göre borcun tümüyle kapatılması için yapılan ödeme tutarını bulunuz ve karşılaştırınız.

1) 20.000 TL nin ödenmesi için yıllık taksit tutarı R olsun. $R = \frac{B.D}{a_{\overline{n}|}} = \frac{20000}{\frac{1-(1+0.10)^{-5}}{0.10}} = 5275.95$ TL

$5275.95 \times 5 = 26379.75$ TL

9

2) Borcun ana para ve 5 yıllık faiz tutarı 5-ci yılın sonunda tek bir ödeme

$$20000\ (1+0.10)^5 = 32210.20$$

3) Borcun ana parası beşinci yılın sonunda tek bir ödeme ile borcun yıllık faiz tutarı her yılın sonunda.

Her yılın sonundaki faiz tutarı :

$$20.000 \times 0.10 = 2000\ TL$$

$20000 + 5 \times 2000 = 30.000$ TL Toplam ödenen tutar.

Bu durumda toplam ödeme tutarlarına göre sıralandığında (2) > (3) > (1) şeklinde olacaktır.

(2) seçeneğinin en büyük toplam ödeme tutarını vermesinin nedenleri anapara borcunun vade içinde sabit kalması ve efektif faizin oranının çarpımsal etkisi nedeniyle dönem arttıkça artışın fazla olmasıdır. (3) seçeneğinde borç tutarı yine sabit kalmakta. ancak borcun faizinin her yılın sonunda ödenmesi nedeniyle faiz oranının çarpımsal etkisi ortadan kalktığından (2) seçeneğine göre daha az tutarda ödeme yapılacaktır. (1) seçeneğinde ise her dönem sonunda yapılan ödemenin bir kısmı anapara borcu, geri kalan kısmı da faiz ödemesi olarak kullanılmaktadır. Her dönemde anapara borcunun bir kısmı ödendiğinden kalan borç tutarı her dönemin sonunda azalacak

10

ve buna bağlı olarak ödenecek faiz tutarlarıda yıllar itibarıyle azalacaktır. Bu nedenle (1) seçeneğinde ödenecek toplam faiz tutarı en az olacaktır.

Problem i yıllık efektif faiz oranıyla her yılın sonunda 2000TL ödeme yapılan n yıllık annüitenin bugünkü değeri 25000TL ve her yılın sonunda 3000TL ödeme yapılan 2n yıllık annüitenin bugünkü değeride 60,000TL dir. t=0 anında yatırılan 10.000 TL'nin 2n yıl sonraki birikimli değerini aynı yıllık i efektif faiz oranı ile bulunuz.

$$2000\, a_{\overline{n}|} = 25000 \qquad a_{\overline{n}|} = 12.50$$

$$3000\, a_{\overline{2n}|} = 60{,}000 \qquad a_{\overline{2n}|} = 20$$

$$\frac{a_{\overline{2n}|}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{20}{12.50} = 1.6 \Rightarrow \frac{\frac{1-(1+i)^{-2n}}{\cancel{i}}}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{\cancel{i}}} = 1.6$$

$$\frac{\cancel{(1-(1+i)^{-n})}\,(1+(1+i)^{-n})}{\cancel{(1-(1+i)^{-n})}} = 1.6$$

$$1+(1+i)^{-n} = 1.6$$

$$(1+i)^{-n} = 0.6 \Rightarrow (1+i)^{n} = \frac{1}{0.6} \Rightarrow (1+i)^{2n} = \left(\frac{1}{0.6}\right)^2$$

Birikimli değer (2n yıllık) $10000\,(1+i)^{2n} = 10.000\left(\frac{1}{0.6}\right)^2$

$$= 27777.78 \text{ TL}$$