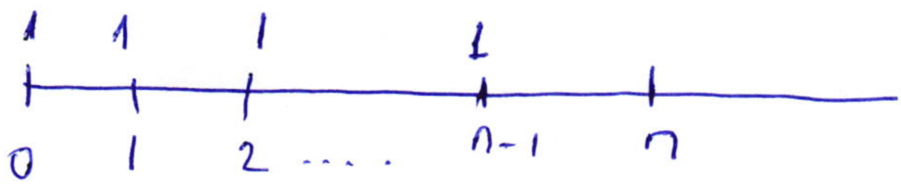
27.03.2020

$\boxed{1}$

Dönem Başı Annüteleri



n dönem boyunca her yılın başında 1 birim ödenen bir annüite verilsin. Bu tür annüitelere dönem başı annüte adı verilmektedir. Bu annüitenin zaman doğrusu yukarıdadır. $t=0$ noktasındaki değeri $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ $t=n$ noktasındaki değeride $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ olarak gösterilmektedir.

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ her dönemin başında bir birimlik ödeme yapılan annüitenin bugünkü değerini, $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ ise bu annüitenin birikim değerini göstermektedir.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1+(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\dots+(1+i)^{-(n-1)}$$

$$(1+i)^{-1}\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\dots+(1+i)^{-(n-1)}+(1+i)^{-n}$$

Taraf tarafa çıkarılır ise

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}-(1+i)^{-1}\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1-(1+i)^{-n}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}\left(1-(1+i)^{-1}\right) = 1-(1+i)^{-n}$$

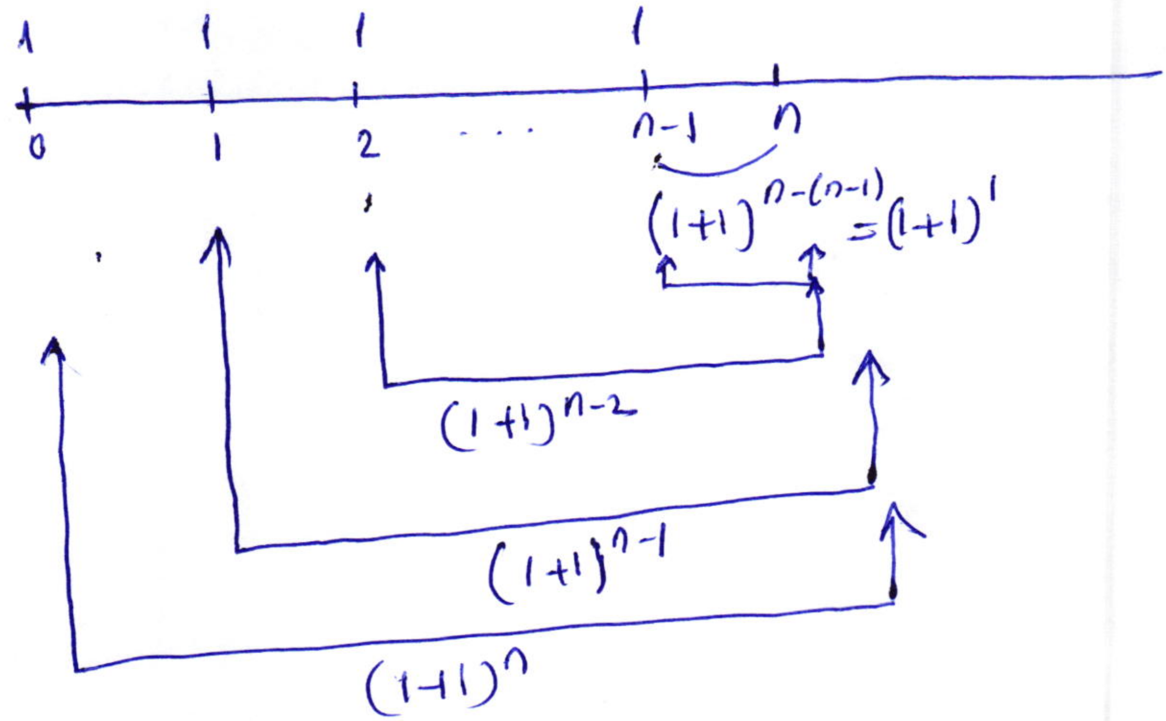
$$\ddot{a}_{\overline{n}|}\left(1-\frac{1}{1+i}\right) = 1-(1+i)^{-n}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}\,\frac{i}{1+i} = 1-(1+i)^{-n}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)\,\frac{\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}$$ elde edilir.

$\boxed{2}$ $a_{\overline{n}|} = \dfrac{1-(1+i)^{-1}}{i}$ olduğu bilindiğine göre

$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)\, a_{\overline{n}|}$ elde edilir. ki bu da dönem sonu ile dönem başı annüitenin bir ilişkisidir.



$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n$$

$$(1+i)\,\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n+1}$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} - (1+i)\,\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i) - (1+i)^{n+1}$$

$$\underbrace{(1-(1+i))}_{-i}\,\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)\,(1-(1+i)^n)$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)\boxed{\frac{(1-(1+i)^n)}{-i}} = \underbrace{\boxed{\frac{(1+i)^n-1}{i}}}_{S_{\overline{n}|}}$$

$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)\, S_{\overline{n}|}$ elde edilir.

3

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^n$$

dönemlik ödemeler şu ana kadar 1 birim kabul edildi. Ama dönemlik ödemeler R birim kabul edilseydi

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = R\,(1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = R\,(1+i)\left(\frac{(1+i)^n-1}{i}\right)$$ olurdu.

Problem

Ayşe 10 yıl boyunca her yılın başında 5000TLira yatırarak çocuklarına eğitim için bir fon oluşturmak istiyor. Yıllık efektif faiz oranı %8 olarak verildiğine göre bu annüitenin bugünkü değerini ve 10cu yılın sonundaki birikimli değerini hesaplayın.

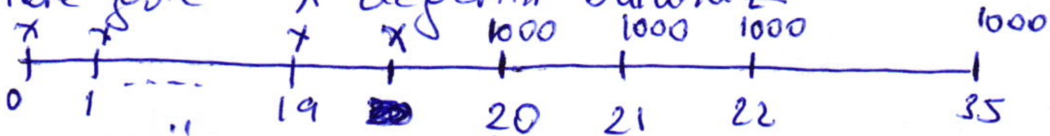
$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 5000\,(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$= 5000\,(1+0.08)\,\frac{1-(1+i)^{-10}}{0.08} = 36234.44$$ elde edilir.

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = 5000(1+i)\left[\frac{(1+i)^{+n}-(1)}{i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

$$= 5000\,(1+0.08)\,\frac{(1+0.08)^n-1}{0.08} = 78227.40$$

4 Bir katılımcı bir emeklilik fonuna 6 aylığa dönüştürülebilir yıllık nominal %16 faiz oranı ile 20 yıl boyunca her 6'cı ayın başında X lira yatırmıştır. Katılımcıya emekli olduğunda bu fondan ilk ödemesi 20 yılın sonunda başlayan aylığa dönüştürülebilir yıllık %24 faiz oranı ile 15 yıl boyunca her ayın başında 1000 lira emekli maaşı ödemesi yapılacaktır. Bu verilere göre X değerini bulunuz



$$\cancel{X\ddot{a}_{\overline{40}|0.08} = 1000(1+i)^{-40}(1+i)\,((1+i)^{-40}}$$

$$X\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1000(1+i)^{-n}\,\ddot{a}_{\overline{180}|i}$$

$$X\ddot{a}_{\overline{40}|0.08} = 1000(1+i)^{-40}(1+i)\frac{1-(1+i)^{-180}}{i}$$

0.08   0.02

$i=0.02$

$X = 177.12$ TL ödemesi gerekir.

Problem

$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 12.45$

$\ddot{a}_{\overline{2n}|i} = 18$

} olarak verildiğine göre aynı efektif faiz oranı üzerinden $t=0$ anında yatırılan 20.000 TL'nin 4n yıl sonraki birikimli değerini bulunuz.

$$\frac{\ddot{a}_{\overline{2n}|i}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{18}{12.45} = 1.4458 \quad \cancel{(1+i)}\frac{1-(1+i)^{-2n}}{\cancel{i}}\,\frac{1}{\cancel{(1+i)}}\,\frac{\cancel{i}}{1-(1+i)^{-n}} = 1+(1+i)^{-n}$$

$\boxed{5}$ $(1+i)^{-n}=0.4458 \Rightarrow (1+i)^{n}=\dfrac{1}{0.4458} \Rightarrow (1+i)^{4n}=\left(\dfrac{1}{0.4458}\right)^{2}$

Biriken değer $=20.000\,(1+i)^{4n}=20.000\,\dfrac{1}{(0.4458)^2}$

$=506372.07$

Problem: Yıllık efektif faiz oranı %10 olarak verildiğine göre 10 yıl boyunca her üçüncü ayın başında 100 TL yatırılan annüitenin bugünkü değerini bulunuz.

$(1+i)=(1+j)^4$

$(1+0.1)=(1+j)^4 \Rightarrow (1.01)^{1/4}=1+j \Rightarrow j=0.0241$

$$100\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}=100\,(1+j)\,\frac{\left(1-(1+j)^{-n}\right)}{j}$$

$$=100\,(1+0.0241)\,\frac{\left(1-(1+0.0241)^{-40}\right)}{0.0241}$$

Dönem Başı ve Dönem sonu Annüite arasındaki ilişkiler.

1) $\ddot{a}_{\overline{n}|}=(1+i)\,a_{\overline{n}|}$

2) $\ddot{s}_{\overline{n}|}=(1+i)\,s_{\overline{n}|}$

3) $\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+a_{\overline{n-1}|}=1+\dfrac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}=\dfrac{i+1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$

$=(1+i)\left(\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)=\ddot{a}_{\overline{n}|}$

$\boxed{6}$

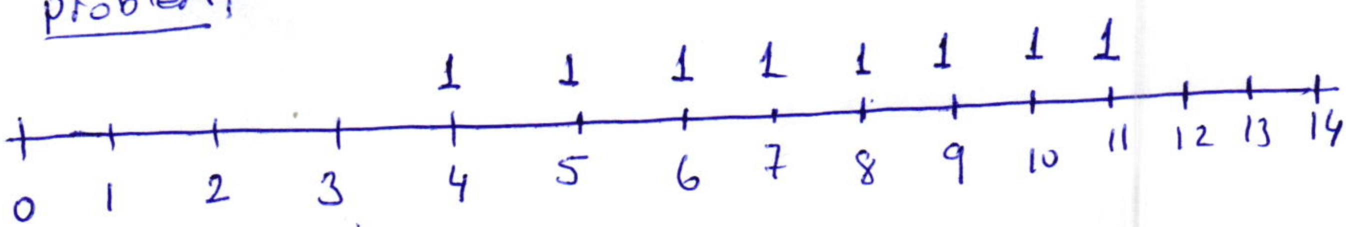
$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1 = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1 = \frac{(1+i)^{n+1}-1-i}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i} = (1+i)\,\frac{\left((1+i)^{n}-1\right)}{i} = (1+i)\,s_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

Bir annüitenin herhangi bir tarihteki değeri

1) ilk ödeme tarihinden bir önceki zaman değeri
2) Son ödeme yapıldıktan sonraki zaman değeri
3) ilk ödeme ile son ödeme arasındaki zaman değeri.

problem;



4cü yılın sonundan 11ci yılın sonuna kadar toplam 8 (1 birimlik) ödeme yapılsın

1 durum Annüitenin ilk ödemeden 4 dönem önceki değeri

$a_{\overline{8}|i}$ $\quad (1+i)^{-3} a_{\overline{8}|}$ sonuç olur.

↓

3deki değere geldik

2 durum Annüitenin son ödemeden sonra herhangi bir tarihteki değeri: son ödeme tarihinden (11. dönemden) 3 dönem sonraki ~~ödeme~~ birikimli değer $s_{\overline{8}|i}(1+i)^3$ 14cü dönemdeki birikmiş değer

$\boxed{7}$ 3cü durum;

Annüiteam ilk ödeme ile son ödeme arasındaki değeri

7cı dönemdeki değerini hesaplıyalım.

$a_{\overline{8}|i}\,(1+i)^4$