21.04.2021

OPTIMIZASYON TEKNIKLERI

I metot

H (Hesian matris)'in özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ olsun.

1) Tüm $\lambda_i \geq 0$ $(\forall i \in [1,2,\dots n]) \Rightarrow H$ yarı pozitif definit
2) Tüm $\lambda_i > 0$ $(\forall i \in [1,2,\dots n]) \Rightarrow H$ pozitif definit
3) Tüm $\lambda_i \leq 0$ $(\forall i \in [1,2,\dots n]) \Rightarrow H$ yarı negatif definit
4) Tüm $\lambda_i < 0$ $(\forall i \in [1,2,\dots, n]) \Rightarrow H$ negatif definittir.

II Metod (Principal Leading Minors)

k cı mertebeden A matrisinin minorü

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ olsun. $\Delta_1 = |a_{11}|$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

değerleri Leading Principal Minorlardır.

$\Delta_1 > 0$ $\Delta_2 = 0$ $\Delta_3 = 0$ çıkarsa pozitif semi definit olabilir.

O zaman

Principal minorlara bakarız.

1cı mertebe $|a_{11}|$ $|a_{22}|$ $|a_{33}|$ pozitif veya sıfır olmalı

2cı mertebe $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

pozitif veya sıfır olmalı

3cü mertebe $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ pozitif veya sıfır olmalı

Aksi halde indefinittir.

2

Leading Principal Minorlar

$\Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 = 0 \;, \; \Delta_3 = 0$ ise

Negatif semi definit ortaya çıkabilir.
Bu durumda köşegen elemanları negatif veya sıfır olmalı,
2ci mertebe determinantların (Tümü) (yani 2 tanesi) pozitif
veya sıfır 3x3 lük determinantta negatif olmalı

örnek

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

LPM (Leading Principal Minor)

$\Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} = 0$

pozitif semi definit olabilir mi?

All P.M

1) köşegen elemanları (order 1) $\quad 1, \; 1, \; 1/2$ pozitif veya sıfır.

2) All p.M of 2 (order) $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix}$

$= 0, \; -1/2, \; -1/2$

pozitif veya sıfır olması gerekiyordu sağlamıyor.

3) All p.M of 3 (order)

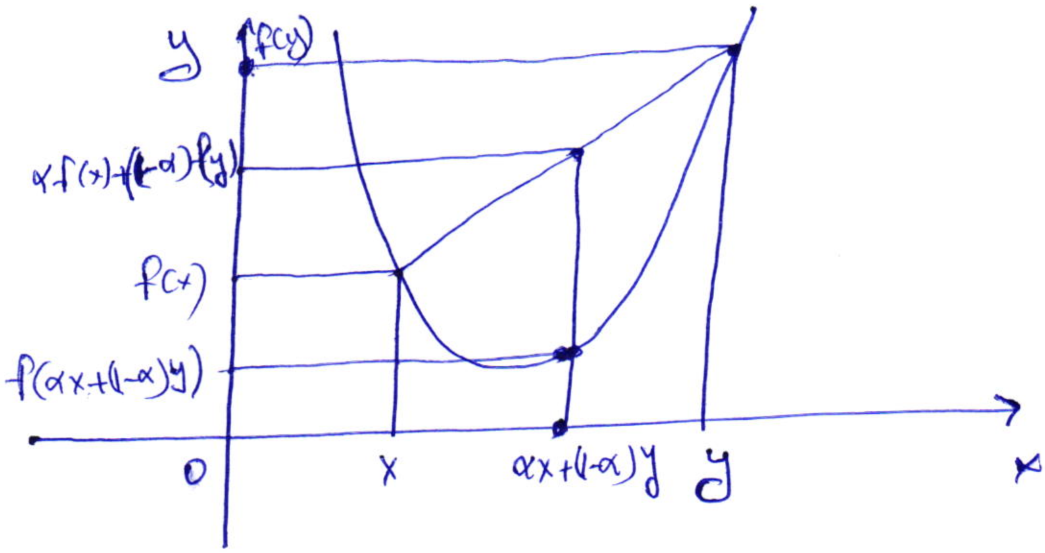
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} = 0$ bakmaya gerek yok

3

o halde C matrisi pozitif semi definit olamaz.

Teorem Ω konveks kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun konveks olabilmesi için $\forall x, y \in \Omega$ ve $\forall \alpha \in (0,1)$ $(f: \Omega \to \mathbb{R})$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$



Teorem Ω konveks kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun kesin konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Tanım . $f: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konkav (veya kesin konkav) ise $-f$ konveks (veya kesin konvekstir)

Tanım: f'in grafiği $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\Omega \times \mathbb{R}$'nin $\subset \mathbb{R}^{n+1}$ noktalar kümesidir.

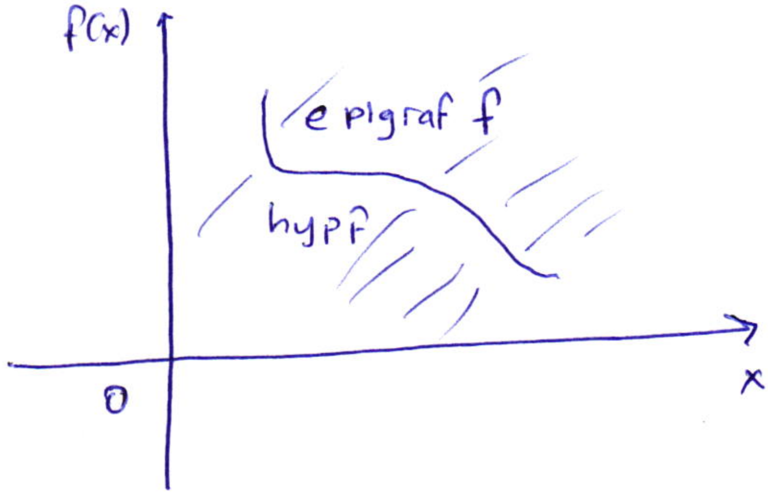
$$\{[x, f(x)]^T ; x \in \Omega\}$$ ile gösterilir.

Tanım f fonksiyonunun epigrafı $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, epi f ile gösterilir.

$$\text{epi}(f) = \{[x, \beta]^T : x \in \Omega, \beta \in \mathbb{R}, \beta \geq f(x)\}$$

4

epi(f) $\Omega \times R$'nın oluşturduğu noktalardan oluşmuş olup, epi(f), $\mathbb{R}^{n+1}$'in alt kümesidir.



Hypograf f $f: \Omega \to R$ hyp(f) ile gösterilir. $\Omega \times R$'dan alt kümesi olup

$$hyp(f) = \{[x, \beta]^T : x \in \Omega, \beta \in \mathbb{R}, \beta \leq f(x)\}$$

ifade edilir.

$\boxed{5}$ $\min f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x$

fletcher - Reeves yöntemi ile bulunuz. Başlangıç çözümü $x_0 = [0,0]$ olsun.

Flethcher reeves kuadratikler içinde geçerlidir. Adım 3'e geçmeğe gerek yoktur.

a) Analitik yöntem ile

b) fletcher reeves yöntemi ile çözülsün

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0$$

$\Rightarrow$ Taraf tarafa çözülürse

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x = 0$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ -2/\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ -2x - 4y &= 0 \\ \hline -3y &= 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$2x - 1 = 3$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x + y - 3 \\ 2y + x \end{bmatrix} \qquad x_0 = [0,0]$$

$$g_0 = \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_0 = -g_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x_0 + \alpha d_0^T) = f([0,0] + \alpha[3,0]) = f(3\alpha, 0)$$

$x = 3\alpha$ $y = 0$ konulur.

$$f(3\alpha, 0) = 9\alpha^2 - 9\alpha \quad f'(\alpha) = 18\alpha - 9 = 0 \quad \alpha = 1/2$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = [0,0] + 1/2\,[3,0] = [3/2, 0]$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x + y - 3 \\ 2y + x \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \end{bmatrix} = g_1$$

$\boxed{6}$

$$\beta_0 = \frac{g_1' g_1}{g_0' g_0} = \frac{[0, 3/2]\begin{bmatrix}0\\3/2\end{bmatrix}}{[-3, 0]\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}} = \frac{9/4}{9} = 1/4$$

$$d_1 = -g_1 + \beta_0 d_0^T = -\begin{bmatrix}0\\3/2\end{bmatrix} + 1/4\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/4\\-3/2\end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1^T = [3/2, 0] + \alpha_1[3/4, -3/2] = [3/2 + 3/4\alpha_1, \tfrac{-3}{2}\alpha_1]$$

$$x = 3/2 + 3/4\,\alpha_1 \qquad y = -\tfrac{3}{2}\alpha_1$$

$$f(\alpha) = \left(3/2 + \tfrac{3}{4}\alpha_1\right)^2 + \left(\tfrac{-3}{2}\alpha_1\right)^2 + \left(3/2 + \tfrac{3}{4}\alpha_1\right)\left(\tfrac{-3}{2}\alpha_1\right) - 3\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4}\alpha_1\right)$$

$$f'(\alpha) = 2\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4}\alpha_1\right)\tfrac{3}{4} + 2\left(\tfrac{-3}{2}\alpha_1\right)\left(\tfrac{-3}{2}\right) + \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{-3}{2}\alpha_1\right) + \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4}\alpha_1\right)\left(\tfrac{-3}{2}\right)$$

$$-\frac{9}{4}$$

$$= \frac{18}{8} + \frac{18}{16}\alpha_1 + \frac{18}{4}\alpha_1 - \frac{9}{8}\alpha_1 - \frac{9}{4} - \frac{9}{8}\alpha_1 - \frac{9}{4}$$

$$0 = \alpha_1\left(\frac{18}{16} \underset{2}{-\frac{18}{8}} \underset{4}{+\frac{18}{4}}\right) - \frac{18}{4} + \frac{18}{8}$$

$$0 = \alpha_1\left(\frac{18 - 36 + 72}{16}\right) - \frac{18}{8}$$

$$0 = \alpha_1\left(\frac{54}{16}\right) - \frac{18}{8}$$

$$\alpha_1 = \frac{18/8}{54/16} = \frac{\cancel{18}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{54}}} = 2/3$$

$\boxed{7}$

$$X_2 = \left[\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4}\alpha_1 ,\ -\tfrac{3}{2}\alpha_1 \right]$$ idli

$$X_2 = \left[\tfrac{3}{2} + \tfrac{\cancel{3}}{4}\cdot\tfrac{2}{\cancel{3}} ,\ -\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{3} \right]$$

$$X_2 = \left[\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} ,\ -1 \right] = \left[2\ -1 \right]$$