

İkinci Mertebe Kısmi Türevler

Bir $f(x, y)$ fonksiyonun iki kere türevini aldığımızda, ikinci mertebeden türevlerini elde ederiz. Bu türevler genellikle aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{“}d \text{ kare } f dx \text{ kare”} \quad \text{veya} \quad f_{xx} \quad \text{“}f \text{ altı } xx\text{”}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{“}d \text{ kare } f dy \text{ kare”} \quad \text{veya} \quad f_{yy} \quad \text{“}f \text{ altı } yy\text{”}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{“}d \text{ kare } f dx dy\text{”} \quad \text{veya} \quad f_{yx} \quad \text{“}f \text{ altı } yx\text{”}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{“}d \text{ kare } f dy dx\text{”} \quad \text{veya} \quad f_{xy} \quad \text{“}f \text{ altı } xy\text{”}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{Önce } y\text{'ye göre, sonra } x\text{'e göre türev alın.}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x \quad \text{Aynı anlama gelir.}$$

ÖRNEK

$$f(x, y) = x \cos y + ye^x \text{ ise,}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Türevlerini hesaplayınız.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x \cos y + ye^x) \\ &= \cos y + ye^x\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\sin y + e^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ye^x\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x \cos y + ye^x) \\ &= -x \sin y + e^x\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\sin y + e^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -x \cos y\end{aligned}$$

KARIŞIK TÜREV

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Türevlere karışık türev denir ve birbirine eşittir.

Teorem :Karışık Türev teoremi

ÖRNEK

$$w = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}$$

$$\partial^2 w / \partial x \partial y$$

Hesaplayınız.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1.$$

Daha yüksek mertebeli türevler

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{yyxx},$$

ÖRNEK:

$f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$ ise f_{yxyz} türevini bulun.

$$f_y = -4xyz + x^2$$

$$f_{yx} = -4yz + 2x$$

$$f_{yxy} = -4z$$

$$f_{yxyz} = -4$$

Diferansiyellenebilme

Tek değişkenli fonksiyonlarda (mat 1 den), $y = f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ 'da diferansiyellenebilirse, x 'i x_0 'dan $x_0 + \Delta x$ 'e değiştirmekten kaynaklanan f 'nin değerindeki değişikliğin, $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\epsilon > 0$ olmak üzere

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

şeklinde verilmiştii. İki değişkenli fonksiyonlarda ise;

Teorem: İki değişkenli fonksiyonlar için Artım teoremi

$f(x, y)$ 'nin birinci kısmi türevlerinin, (x_0, y_0) noktasını içeren açık bir R bölgesinde tanımlı olduklarını ve f_x ve f_y 'nin (x_0, y_0) 'da sürekli olduklarını varsayın. Bu durumda, (x_0, y_0) 'dan R 'deki başka bir $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ noktasına ilerlemekten dolayı f 'de oluşacak

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

deęişiklięi, $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ iken, $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ olmak üzere,

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

şeklinde bir denklemi sağlar.

Tanım: Diferansiyel Fonksiyon

Bir $z = f(x, y)$ fonksiyonu için $f_x(x_0, y_0)$ ve $f_y(x_0, y_0)$ varsa ve Δz ,

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y,$$

şeklindeki bir denklemi $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ iken $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ olmak üzere sağlarsa, $z = f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) 'da **diferansiyellenebilirdir**. Tanım kümesinin her noktasında diferansiyellenebilirse, f 'ye **diferansiyellenebilir** deriz.

Sonuç : (Kısmi Türevlerin Sürekliliği) Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevleri açık bir R bölgesinde sürekli ise, f fonksiyonu R 'nin her noktasında diferansiyellenebilirdir.

f_x ve f_y kısmi türevleri (x_0, y_0) 'ı içeren açık bir bölgede sürekliyseler, $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli olmak zorundadır. İki değişkenli bir fonksiyon için birinci-mertebeden kısmi türevlerin var olduğu bir noktada, fonksiyonun süreksiz olabileceğini hatırlayın(yukarıda verilen örnekten). Varlık tek başına yeterli değildir.

$z = f(x, y)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ise diferansiyellenebilme tanımına göre, Δx ve Δy 0'a yaklaşırken,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

değerinin sıfıra gitmesini garantiler. Bu bize bir $f(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyellenebildiği her noktada sürekli olduğunu söyler.

TEOREM Diferansiyellenebilirlik Sürekliliği Gerektirir

Bir $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) 'da diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu (x_0, y_0) 'da süreklidir.