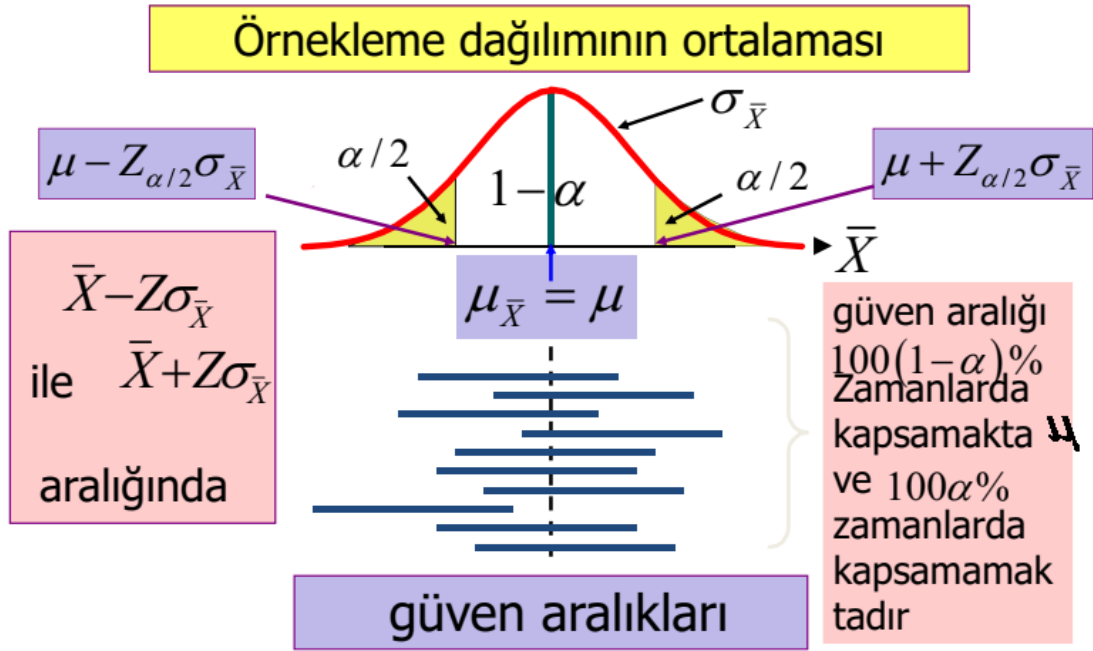


GÜVEN SINIRLARI-GÜVEN ARALIĞI



Ortalaması μ ve standart sapması σ olan anakütleden rasgele n elemanlı mümkün olan bütün örnekler çekilsin. Örnek ortalamalarının normal dağıldığını varsayarak örneklerden birinin ortalamasının $\%99$ olasılıkla

$$\left[\mu - z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

aralığında bulunması için z_c değeri ne olmalıdır?

Bunun anlamı aslında şudur: örnek ortalaması $\bar{x}$ ise

$$P\left(\mu - z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

Bu olasılığın 0.99 olması için z_c değeri ne olmalıdır?

$z_c = 2.575$ değeri tablodan görülür. $0.99/2 = 0.495$ alanına karşılık gelen değerden $z_c = 2.575$ değeri bulunur. Yani;

$$P(\mu - 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.99$$

$\bar{x}$ ile μ arasındaki fark 0.99 olasılıkla $2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ yi geçemez . bu aradaki fark aslında hata demektir.

Tanım:

$$\left[\mu - 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Aralığı, %99 güven aralığı ve bu aralığın sınırları da ,%99 güven sınırları denir. $\bar{x}$ nin bu aralığın dışında kalma olasılığı(riski) %1 dir.

%99 güven aralığında kestirim hatası (hata payı) $\bar{x}$ ile μ arasındaki fark 0.99 olasılıkla $2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ yi geçemez . bu aradaki fark aslında hata demektir.

dir.

ÖRNEK: $\bar{x}$ örnek ortalamasının, %95 olasılıkla

$$\left[\mu - z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

aralığında bulunması için z_c değeri ne olmalıdır?

$$P(\mu - z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

Tablodan z_c değeri 1.96 dır. $\bar{x}$ ile μ arasındaki fark 0.95 olasılıkla

$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ yi geçemez . $0.95/2=0.475$, $F(0.475)=1.96$

z_c değerine bağlı olarak %99 ve %95 güven aralıklarının dışında başka güven aralıkları da mevcuttur.

ÖRNEK:

Bir fabrikada üretilen daire şeklindeki pulların yarıçaplarının ortalaması 2.84 cm ve standart sapması 0.3 cm olan bir dağılım göstermektedir. Bu ana kütleden rasgele çekilişlerle n=100 lük bir örnek alınıyor. Örnek ortalamasının

- 1) %95
- 2) %99
- 3) Güven aralıklarını bulunuz.
- 4) Hangi güven sınırında 2.84 ± 0.035 olur?

1) %95 için $z_c = 1.96$ dır. %95 güven aralığı:

$$\left[2.84 - 1.96 \frac{0.3}{\sqrt{100}}, 2.84 + 1.96 \frac{0.3}{\sqrt{100}} \right] \quad [2.7812, 2.8988]$$

$$2) \left[2.84 - 2.575 \frac{0.3}{\sqrt{100}}, 2.84 + 2.575 \frac{0.3}{\sqrt{100}} \right]$$

$$[2.76275; 2.91725]$$

$$P(2.76275 \leq \bar{x} \leq 2.91725) = 0.99$$

$$3) z_c \frac{0.3}{\sqrt{100}} = 0.035 \quad z_c = 1.667 \text{ tablodan alan} = 0.4525 \quad 2(0.4525) = .905$$

olduğundan 2.84 ± 0.035 sınırları %91 güven aralığının sınırındır.

$\bar{x}$ örnek ortalamasının $[2.84 - 0.035; 2.84 + 0.035]$ aralığında bulunma riski %9 dur.

ÖRNEK

Standart sapması 9.5 birim olan bir ana kütleden rasgele çekilişlerle alınan bir örneğin

a) %95

b) %99

Aralığında kestirim hatasının 5.7 birimi aşmaması için en az kaç boyutlu örnek çekilmelidir?

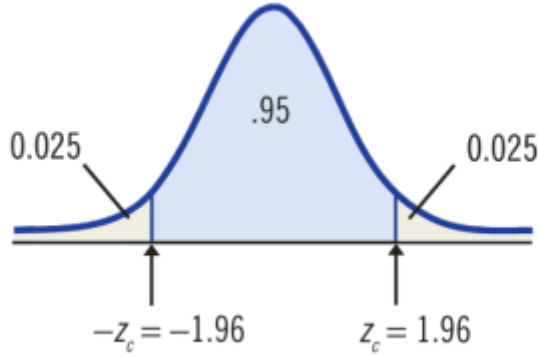
$$a) \text{ %95 güven aralığında kestirim hatası } 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ olduğundan } 1.96 \frac{9.5}{\sqrt{n}} \leq 4.7$$

$$n \geq 16$$

$$b) \text{ %99 güven aralığında kestirim hatası } 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ olduğundan}$$

$$2.575 \frac{9.5}{\sqrt{n}} \leq 4.7 \quad n \geq 27$$

ÖRNEK: Bir üniversitede öğrencilerin kütüphaneyi kullanım süreleri hakkında yapılan bir araştırma kapsamında, rasgele olarak 250 öğrenciden oluşan bir örnek seçilmiştir. Ana kütlelin ortalaması 15.7 saat olarak hesaplanmıştır. Secilen bu örneğin ortalaması, %95'lik güven düzeyinde hata payı 2.2 saat olduğuna göre %95 lik güven aralığını oluşturunuz.



$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 15.7$$

Hata payı(Kestirim hatası): $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.2$ %95 için $1 - \alpha = 0.95$ $\alpha = 0.05$ $\alpha / 2 = 0.025$ 0.5-
0.025=0.475

Tablodan F(0.475)=1.96

$$\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$15.7 - (2.2) \leq \bar{x} \leq 15.7 + (2.2)$$

$$13.5 \leq \bar{x} \leq 17.9$$

Kritik Değer, z_c :

Güven aralıkları için kritik z-değerleri	
Güven düzeyi, c	z_c
0.80	1.28
0.85	1.44
0.90	1.645
0.95	1.96
0.98	2.33
0.99	2.575

ÖRNEK

10000 kişiye yapılan bir sınıf geçme sınavının ortalaması 55 ve standart sapması 18 tir. Bu sınava katılan 25 öğrenciden oluşan bir örneğin ortalamasının %95 güven aralığını bulunuz.

$$\mu = 55 \quad \sigma = 18$$

$$\%95 \text{ için } 1 - \alpha = 0.95 \quad \alpha = 0.05 \quad \alpha / 2 = 0.025 \quad 0.5 - 0.025 = 0.475$$

Tablodan $F(0.475) = 1.96$

$$\mu - z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad 55 - 1.96 \frac{18}{\sqrt{25}} \leq \bar{x} \leq 55 + 1.96 \frac{18}{\sqrt{25}}$$

$$47.944 \leq \bar{x} \leq 62.056$$