

İki Bağımsız Değişkenli Fonksiyonlar İçin Zincir Kuralı

$w = f(x, y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevleri sürekli ise ve $x = x(t)$, $y = y(t)$ t 'nin türetilbilir fonksiyonları ise

$$w = f(x(t), y(t)) = F(t)$$

t 'nin türetilbilir bir fonksiyonudur. w nin t ye göre türevi;

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

olur.

Örnek: $x = \cos t$, $y = \sin t$ yolu boyunca $w = x y$

fonksiyonunun dw/dt türevinin $t = \frac{\pi}{2}$ 'deki değeri nedir?

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial(xy)}{\partial x} \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{\partial(xy)}{\partial y} \cdot \frac{d}{dt}(\sin t) \\ &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) \\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t \\ &= \cos 2t. \end{aligned}$$

yada

$$w = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2t = \cos 2t$$

$$\left(\frac{dw}{dt} \right)_{t=\pi/2} = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \cos \pi = -1$$

TEOREM Üç Bağımsız Değişkenli Fonksiyonlar için Zincir Kuralı

$w = f(x, y, z)$ türetilabiliyorsa ve x, y, z de t 'nin türetilbilir fonksiyonlarıysa, w da t 'nin türetilbilir bir fonksiyonudur

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

ÖRNEK

$$w = xy + z, x = \cos t, y = \sin t, z = t$$

ise, dw/dt 'yi bulun. Türevin $t = 0$ 'daki değeri nedir?

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\
&= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1) \\
&= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\
&= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t.
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{dw}{dt} \right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2.$$

Yüzeyler Üzerinde Tanımlanan Fonksiyonlar

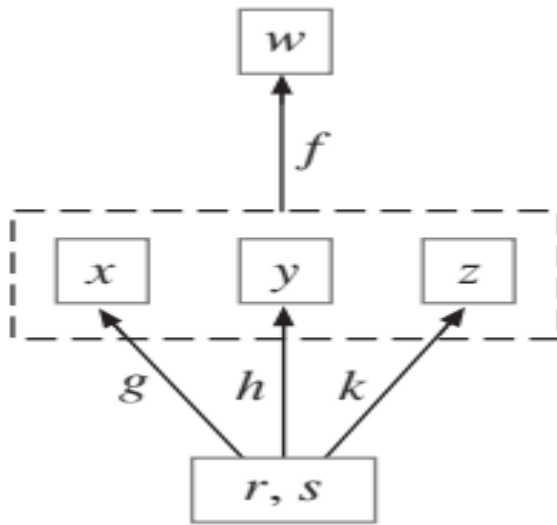
Uzayda (x, y, z) noktalarında $w = f(x, y, z)$ $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ ve $z = k(r, s)$ ise, r ve s 'nin fonksiyonu olarak

$$w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s)) = F(r, s)$$

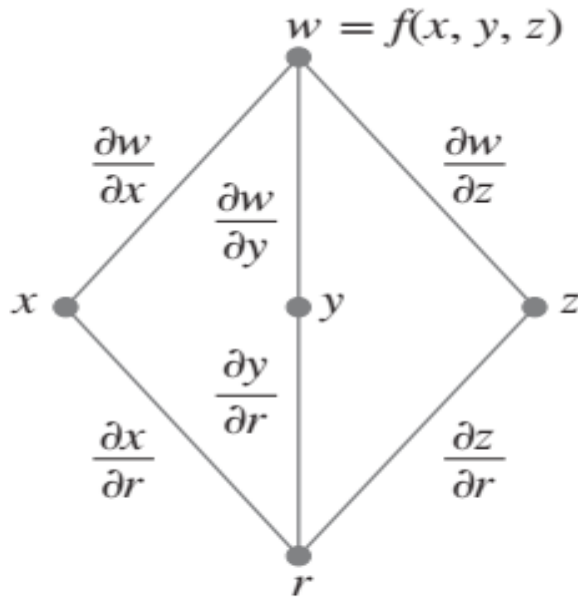
bileşke fonksiyonuyla r ve s 'nin fonksiyonu olarak ifade edebiliriz.

Hem r hem de s 'ye göre kısmi türevler aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

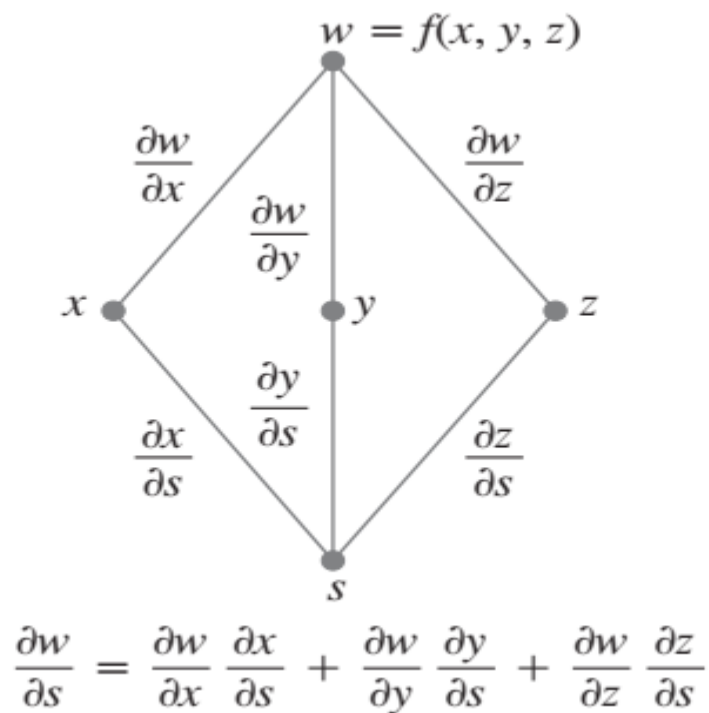
$$w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s))$$



İki Bağımsız Değişken ve Üç ara değişken için Zincir Kuralı



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$



ÖRNEK: $w = x^2 + y^2, \quad x = r - s, \quad y = r + s$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = ? \quad \frac{\partial w}{\partial s} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (2x)(1) + (2y)(1) \\ &= 2(r - s) + 2(r + s) \\ &= 4r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (2x)(-1) + (2y)(1) \\ &= -2(r - s) + 2(r + s) \\ &= 4s \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = \frac{r}{s}, \quad y = r^2 + \ln s, \quad z = 2r$$

$\partial w/\partial r$ ve $\partial w/\partial s$ 'yi r ve s cinsinden bulun.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= (1) \left(\frac{1}{s} \right) + (2)(2r) + (2z)(2) \\ &= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (1) \left(-\frac{r}{s^2} \right) + (2) \left(\frac{1}{s} \right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}\end{aligned}$$

ÖRNEK: $z = z(x, y)$ nin diferansiyellenebilen bir fonksiyonu olmak

üzere $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini sağlamaktadır. Bu denklemi

Kutupsal koordinatlarda yazınız.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad z = z(x, y) = f(r, \theta)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial z}{\partial x} \underbrace{(-r \sin \theta)}_{-y} + \frac{\partial z}{\partial y} \underbrace{(r \cos \theta)}_x \\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= -y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

KAPALI TÜREV ALMA

$$F(x, y) = 0,$$

$$F(x, y(x)) = 0$$

$$\text{ise } \frac{dy}{dx} = ? \quad F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

ÖRNEK:

$$y^2 - x^2 - \cos(xy) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x + y \sin(xy)}{2y + x \sin(xy)}$$

$z = f(x, y)$ fonksiyonu kapalı form da aşağıdaki gibi yazılır.

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = ?, \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

$$F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}}$$

$$F_x \frac{dx}{dy} + F_y \frac{dy}{dy} + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}}$$

ÖRNEK:

$xe^y + ye^z + 2 \ln x - 2 - 3 \ln 2 = 0$, fonksiyonunun

$\frac{\partial z}{\partial x} = ?, \frac{\partial z}{\partial y} = ?$ türevlerinin $(1, \ln 2, \ln 3)$ noktasındaki değerlerini

hesaplayınız?

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{e^y + \frac{2}{x}}{ye^z} \bigg|_{(1, \ln 2, \ln 3)} = -\frac{2+2}{3 \ln 2} = -\frac{4}{3 \ln 2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{xe^y + e^z}{ye^z} \bigg|_{(1, \ln 2, \ln 3)} = -\frac{1.2 + 3}{3 \ln 2} = -\frac{5}{3 \ln 2}$$

ÖRNEK; $z = f(x, y)$ olmak üzere $\omega(2x - z^2, y - \frac{1}{3}z^3) = 0$

ise $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$ türevlerini hesaplayınız.

1.YOL:

g türevlenebilir bir fonk. o.ü

$$y - \frac{1}{3}z^3 = g(2x - z^2) \text{ olsun.}$$

$$F(x, y, z) = -y + \frac{1}{3}z^3 + g(2x - z^2) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2g'(2x - z^2)}{z^2 - 2z g'(2x - z^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-1 + 0 \cdot g'(2x - z^2)}{z^2 - 2z g'(2x - z^2)}$$

2.yol

$$F(x, y, z) = \omega(u, v) \Rightarrow u = 2x - z^2, \quad v = y - \frac{1}{3}z^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\omega_u u_x + \omega_v v_x}{\omega_u u_z + \omega_v v_z} = -\frac{\omega_u (2) + \omega_v (0)}{\omega_u (-2z) + \omega_v (-z^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\omega_u u_y + \omega_v v_y}{\omega_u u_z + \omega_v v_z} = -\frac{\omega_u (0) + \omega_v (1)}{\omega_u (-2z) + \omega_v (-z^2)}$$

3.yol

$$\omega(u, v) = 0 \Rightarrow u = 2x - z^2, \quad v = y - \frac{1}{3}z^3$$

$$\omega_u (2 - 2zz_x) + \omega_v (-z^2 z_x) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2\omega_u}{\omega_u (-2z) + \omega_v (-z^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\omega_v}{\omega_u (-2z) + \omega_v (-z^2)}$$