

Belirsiz Şekiller

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0^0, \infty^0, 1^\infty$ şeklinde belirsiz ise limiti belirli hale getirmek için ;

$y = [f(x)]^{g(x)}$ fonksiyonunda her iki tarafın logaritması alınarak ;

$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının limitleri alınarak ;

$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln f(x) = 0 \cdot \infty$ şekline dönüştürülür.

Daha sonra $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ yazılarak belirsizlik $\frac{\infty}{\infty}$ veya $\frac{0}{0}$ şekline dönüştürülür.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0^0$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0 \cdot \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

O halde;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^0 = 1$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\ln x} = 0^0,$$

$$y = (\ln x)^{\ln x}$$

$$\ln y = \ln x \cdot \ln(\ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(\ln x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x \cdot \ln x}}{\frac{-1}{x \cdot (\ln x^2)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (-\ln x)$$

$$= 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\ln x} = e^0 = 1$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = 0^0, y = (\sin x)^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)}{\cos x}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x = 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^x + \frac{1}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^2$$

ÖRNEK

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{1/x}$ limitinin değerini bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{1/x} = 1^{\infty}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 - \sin 3x)}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cos 3x / (1 - \sin 3x)}{1} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cos 3x}{1 - \sin 3x} \\&= \frac{-3}{1} \\&= -3\end{aligned}$$

Yani;

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 - \sin 3x)}{x} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 0} y &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{1/x} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}\end{aligned}$$