	İmza	

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

Nuran Güzel

1.a) $f(x)=\dfrac{\ln(18-2x^2)}{|2x-5|}+\arcsin(x-3)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. **(13P)**

$18-2x^2>0$

$18>2x^2$

$9>x^2$

$(-3,3)$

$2x-5\neq 0$

$x\neq \frac{5}{2}$

$-1\leq x-3\leq 1$

$2\leq x\leq 4$

$[2,4]$

$T.K: \left[2,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},3\right)$

1.b) $\sqrt[4]{18}$ sayısının yaklaşık değerini lineer yaklaşım veya diferansiyel hesap kullanarak hesaplayınız. **(12P)**

$f(x)=\sqrt[4]{x}$, $a=16$, $f(16)=2$

$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$, $f'(16)=\frac{1}{32}$

$f(x)\approx L(x)=f(16)+f'(16)(x-16)$

$L(x)=2+\frac{1}{32}(x-16)$

$f(18)\approx L(18)=2+\frac{1}{32}(18-16)=2+\frac{1}{16}=\frac{33}{16}$

$f(18)\approx\frac{33}{16}$

Başarılar...

N. Güzel

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x^2}{x^4} & , x<0 \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin x+\dfrac{3}{\pi}\arccos x & , 0\le x\le 1 \\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1} & , x>1 \end{cases}$ fonksiyonu için:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ limitlerinin varlığını araştırınız. (**L'Hopital Kuralı kullanılmayacaktır**)

(17P)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-\cos x^2)}{x^4}\cdot\frac{(1+\cos x^2)}{(1+\cos x^2)}=\lim_{x\to 0^-}\underbrace{\frac{\sin^2 x^2}{x^4}}_{1}\cdot\frac{1}{1+\cos x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2}{\pi}\underbrace{\arcsin x}_{0}+\frac{3}{\pi}\underbrace{\arccos x}_{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{3}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan limit mevcut degildir.

$$\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{2}{\pi}\underbrace{\arcsin x}_{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{\pi}\underbrace{\arccos x}_{0}\right]=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\underbrace{(x-1)}_{0}\underbrace{\sin\frac{1}{x-1}}_{A,\ -1\le A\le 1}=0$$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan limit mevcut degildir.

b) $x=0$ ve $x=1$ noktalarında f fonksiyonunun sürekliliğini araştırıp, süreksizlik olması halinde türünü belirleyiniz. **(8P)**

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan $x=0$ da sıçramalı süreksizlik vardır.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan $x=1$ de sıçramalı süreksizlik vardır.

Nuran Güzel

3.a) Kapalı Türetme Yöntemini kullanarak, $2x+\cos(x+y)=y^2-\pi$ ile kapalı olarak tanımlı $y=f(x)$ eğrisinin $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ noktasındaki normal doğrusunun denklemini bulunuz. (12P)

$2-(1+y')\sin(x+y)=2y.y'$

$x=\frac{-\pi}{2}$ ve $y=0$ için;

$2+(1+y')=0$

$m_T=y'=-3 \Rightarrow \boxed{m_N=\frac{1}{3}}$

N.D.D. $\quad y-0=\frac{1}{3}\left(x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\underline{y=\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}}$ //

3.b) $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x.\sec x$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ değerini bulunuz. (13P)

$f'(x)=\sec x+x.\sec x.\tan x>0 \quad \left(\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$

olduğundan f artandır $\Rightarrow f$, 1-1 $\Rightarrow f$'in tersi mevcuttur.

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $\quad (f^{-1})'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(\frac{2\pi}{3})}_{a})}$

$f^{-1}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=a \Rightarrow f(a)=\frac{2\pi}{3}$ $\quad =\frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})}$

$a.\sec a=\frac{2\pi}{3}$

$\boxed{a=\frac{\pi}{3}}$ $\quad =\frac{3}{6+2\sqrt{3}\pi}$ //

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sec\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}$

$=2+\frac{\pi}{3}.2.\sqrt{3}$

$=\frac{6+2\sqrt{3}\pi}{3}$

Başarılar

4.a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\arctan x\right)^{\frac{1}{x^2+2x}}$ limitini hesaplayınız. **(14P)**

$$y=\left(1+\arctan x\right)^{\frac{1}{x^2+2x}}$$

$$\ln y=\frac{1}{x^2+2x}\cdot\ln\left(1+\arctan x\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\arctan x\right)}{x^2+2x}=\left(\frac{0}{0}\text{ bl.}\right)$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{1+\arctan x}}{2x+2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\frac{1}{2}$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}y\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(1+\arctan x\right)^{\frac{1}{x^2+2x}}=e^{1/2}\quad //$$

4.b) $\sqrt[3]{x-1}-3x=0$ denkleminin $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ aralığında bir kökünün var olup olmadığını araştırınız. **(11P)**

$f(x)=\sqrt[3]{x-1}-3x$ fonksiyonu $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ aralığında süreklidir.

$f(0)=-1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=a>0$

olayısıyla f $[-1,a]$ aralığındaki her değeri alır. O halde $0\in[-1,a]$ değerini de alır. Yani $f(c)=0$ olacak şekilde $c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ vardır.

veya

$f(0)=-1<f(c)=0<f\left(-\frac{1}{2}\right)=a$ olduğundan Ara Değer Teoremine göre $f(c)=0$ olacak şekilde $c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ vardır.

LECTURER		SIGNATURE

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yap***
buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1. **a)** Evalute the limit without using L'Hospital Rule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\cot^2 x}$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & , x = 0 \\ \sin\left(\dfrac{x}{3}\right) & , 0 < x < 3 \\ 2^{\frac{1}{x-4}} & , 3 \le x < 4 \text{ and } 4 < x \le 5 \\ \dfrac{\pi}{2} & , x = 4 \end{cases}$$

Is the function continuous at $x = 0,$
If not, classify the types of disc
reasons for your answer.

Çözümler

19

1) a) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{\cot^2 x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x-1)}{\cot^2 x} \cdot \frac{(\sin x+1)}{(\sin x+1)}$ Nuran Güzel

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x-1}{\cot^2 x(\sin x+1)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^2 x}{\cot^2 x.(1+\sin x)}$

$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 x}{1+\sin x} = -\frac{1}{2}$

15 b) $\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{x}{3}\right)=0$ ve $f(0)=\frac{\pi}{2}$, f-fonksiyonu

x=0 'da kaldırılabilir süreksizdir — 5

$\lim_{x\to 3^+} 2^{\frac{1}{x-4}} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 3^-} \sin\frac{x}{3} = \sin 1$, $f(3)=\frac{1}{2}$ — 5

f-fonk. x=3'te sıçramalı süreksizdir.

$\lim_{x\to 4^+} 2^{\frac{1}{x-4}} = \infty$, $\lim_{x\to 4^-} 2^{\frac{1}{x-4}} = 0$ — 5

f-fonk. x=4 te sonsuz süreksizdir.

Nuran Güzel

* $1-\frac{x^2}{4}=\cos x$ denkleminin en az iki real çözümünün old. göst.

$f(x)=1-\frac{x^2}{4}-\cos x$ polinom + trigonometrik funk.

$\forall x$ için sürekli

$f(\pi/2)=1-\frac{\pi^2}{16}-\cos\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi^2}{16}>0$

$f(\pi)=1-\frac{\pi^2}{4}+1=2-\frac{\pi^2}{4}<0$

$3<\pi<4 \Rightarrow 2<\frac{9}{4}<\frac{\pi^2}{4}$ ve $\frac{\pi^2}{16}<1$

$c\in(\pi/2,\pi)$

$x=0 \Rightarrow 1-\frac{0}{4}=\cos 0$ ✓ $x=0$ da köktür.

* $\frac{d}{dx}\left(\cos\sqrt{\sin(\tan(9x))}\right)=-\sin\sqrt{\sin(\tan 9x)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin(\tan(9x))}}\cdot(\sin(\tan$

$\cdot 9\sec^2 9x\cdot\cos(\tan 9$

* $x.J''(x)+J'(x)+xJ(x)=0$ $J(0)=1$ ve $J'''(0)$ mevcut ise $J''(0)$ bulunuz.

$\frac{d}{dx}$

$1.J''(x)+xJ'''(x)+J''(x)+J(x)+xJ'(0)=0$

$x=0$

$J''(0)+0+J''(0)+\underbrace{J(0)}_{1}=0$

$J''(0)=-1/2$

$\frac{dy}{dx} = xy^2$ ve $y(0)=1$ olacak şekilde

y türevlenebilir ise $y(1)$ hesaplayınız

$$\frac{dy}{y^2} = x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \qquad -\frac{1}{1} = \frac{0}{2} + c \qquad c = -1$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - 1$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2-2}{2}$$

$$-y = \frac{2}{x^2-2}$$

$$y = \frac{-2}{x^2-2} \Rightarrow y(1) =$$

$y(1) = 2$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + 2\cos\sqrt{x} - 2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} + \frac{2(\cos\sqrt{x} - 1)}{x^2} \frac{(\cos\sqrt{x}+1)}{(\cos\sqrt{x}+1)}$$

$$\frac{\cos^2\sqrt{x} - 1}{x^2(\cos\sqrt{x}+1)} \qquad -\sin^2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}\sqrt{x}\,x$$

$$\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$-\sin\sqrt{x} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}$$

$$\frac{\sin x + 2(\cos\sqrt{x} - 1)(\cos\sqrt{x}+1)}{x^2(\cos\sqrt{x}+1)}$$

Nuran Gürel

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonk.nun (0,1) noktasında dik (düşey) teğete sahip midir?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)-1}{h} \begin{cases} \to \lim_{h \to 0^+} \frac{1-1}{h} = 0 = L_1 \\ \to \lim_{h \to 0^-} \frac{0-1}{h} = \infty = L_2 \end{cases} \quad L_1 \neq L_2$$

(0,1) noktasında dik (düşey) teğete sahip değildir.

$f(x) = \sqrt[5]{x} + x - 2$ en az bir kökü old. göst.

[0,2] aralığını gözönüne alalım.

$f(0) = -2 < 0$

$f(2) = \sqrt[5]{2} + \cancel{2} - \cancel{2} > 0$

Sürekli fonk. için Ara Değer teo. göre

en az bir $c \in (0,2)$ için $f(c) = 0$

yani bu aralıkta en az bir köke sahiptir.

$y = \sqrt{x}$ eğrisinin herhangi bir ~~doğru~~ noktasındaki teğet doğrusu x-eks. $x=-1$ noktasında kesebilir mi?

$y=\sqrt{x}$ eğrisi üzerindeki bir $P(x_0, y_0) = P(x_0, \sqrt{x_0})$

$y = \sqrt{x}$ eğrisinin teğet doğrusu

$$y = m(x-x_0) + y_0 = m(x-x_0) + \sqrt{x_0}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \qquad y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) + \sqrt{x_0} = \frac{x-x_0+2x_0}{2\sqrt{x_0}} = \frac{x+x_0}{2\sqrt{x_0}}$$

T.D.D

$x=-1$ noktasında x eks. kesiyorsa kesim noktası $(-1,0)$ olur.

$$0 = \frac{-1+x_0}{2\sqrt{x_0}} \Rightarrow x_0 = 1 \qquad y_0 = \sqrt{x_0} = 1 \quad P(1,1)$$

değme

o halde $y = \dfrac{x+1}{2}$ //

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right)$ $x=6$ da teğet doğrusunun denklemini

$x=6$ $f(6) = \sin\left(\frac{\pi}{\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{1/2}}\right) = 0$ $(6,0)$

$f'(x) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{x}}\right)}_{\cos\left(\frac{\pi}{1/2}\right)} \cdot \underbrace{\frac{-\pi\cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{x}}}_{\frac{\pm\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\pm\frac{\pi}{36}\right)}{\frac{1}{4}}} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}} = f'(6)$

$f'(6) =$

$y - 0 = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}(x-6)$

$x^4 + y^4 = 4xy + 52$ tan. Teğet Doğrusunun ox eks. paralel old. noktaları bulunuz.

$4x^3 + 4y^3 \cdot y' = 4y + 4xy' \Rightarrow y' = 0$ olacak.

$4x^3 = 4y$ $x^3 = y$

$x^4 + x^{12} = 4x^4 + 52$

$x^{12} - 3x^4 - 52 = 0$

$(x^4 - 4)(x^8 + 4x^4 + 13) = 0$

$\Delta < 0$

$x^4 = 4 \to x^2 = 2$: $x = \sqrt{2} \to y = 2\sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2} \to y = -2\sqrt{2}$; $x^2 = -2$

$x^4 = t$

$t^3 - 3t - 52 = 0$

$t = 4$

$64 - 12 - 52 = 0$ ✓

1) $f(x) = 1+\sin(x+\pi)$ Find the domain and range of the following function.

$D_f: (-\infty, +\infty)$ $\sin x$ tüm x değerleri için tanımlıdır.

$R_f: [0, 2]$

$-1 \leq \sin(x+\pi) \leq 1$

$-1+1 \leq 1+\sin(x+\pi) \leq 1+1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$

2) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$

$D_g: (1, 2) \cup (2, +\infty)$

$R_g: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$x-1>0 \quad x>1$

$\ln(x-1) \neq 0 \quad x \neq 2$

3) $h(x) = \dfrac{1}{1-2e^{-x}}$

$1-2e^{-x} \neq 0 \quad 2e^{-x} \neq 1, \; e^{-x} \neq \frac{1}{2}$

$-x \neq \ln\frac{1}{2}$

$x \neq \ln 2$

$\dfrac{1}{1-2e^{-\ln 2}}$

$D_h: (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1-2e^{\infty}} = 0$

Range: $x \in (-\infty, \ln 2) \Rightarrow \dfrac{1}{1-2e^{-x}} < 0$

$R_h: (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$x \in (\ln 2, +\infty) \Rightarrow \dfrac{1}{1-2e^{-x}} > 1$

4) $s(x) = \cos(\ln x)$ $-\infty < \ln x < +\infty$

$x > 0 \quad D_s: (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{3x-1} = \sqrt{2}$$

$\varepsilon > 0$ olsun. $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |\sqrt{3x-1} - \sqrt{2}| < \varepsilon$

old. gösterelim

$$|\sqrt{3x-1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{3x-1-2}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{2}}\right| \leq \left|\frac{3x-3}{\underbrace{\sqrt{3x-1}}_{\substack{>0\\=0}}+\sqrt{2}}\right| < \frac{3}{\sqrt{2}}\underbrace{|x-1|}_{\delta}$$

$$< \frac{3}{\sqrt{2}}\delta = \varepsilon$$

$\delta \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon$ alırsak eşitsizlik sağlanmış olur.

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{3x-1} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1-\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\sin^2 x}}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{\underbrace{1-\cos^2 x}_{\cancel{\sin^2 x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\cos x}{x} \to \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \quad '' \quad = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+\cos x}{x} = -\infty \quad \text{mevcut değildir}$$

N. Güzel

$$\lim_{x\to 10}\sqrt{19-x}=3$$

$0<|x-10|<\delta$ iken $|\sqrt{19-x}-3|<\varepsilon \Rightarrow \delta=\delta(\varepsilon)$

$$\left|\frac{(\sqrt{19-x}-3)(\sqrt{19-x}+3)}{\sqrt{19-x}+3}\right|$$

$$=\left|\frac{19-x-9}{\sqrt{19-x}+3}\right|=\left|\frac{10-x}{\underbrace{\sqrt{}}_{\geq 0}+3}\right|<\left|\frac{10-x}{3}\right|<\frac{|x-10|}{3}<\frac{\delta}{3}=\varepsilon$$

$$\delta=3\varepsilon, 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=1$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$$

$x=1$ de sürekliliğini incele sürekli değilse cinsini belirle

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{x-1} & x>1\\[2ex] \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{-(x-1)} & x<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{2x}=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}-\sqrt{2x}=-\sqrt{2}$$

$f(1^+)\neq f(1^-)$ olduğundan $x=1$ sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

N. Güzel

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1} = \lim_{t \to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t \to 1} \frac{\cancel{(t-1)}(t+1)(t^2+1)}{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)}$$

$$= \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$x+1 = t^{12}$

$x \to 0 \quad t \to 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ da ~~$f'(0)$~~ ~~diferan~~ türevlenebilir old. göster ve $f'(0)$ hesapla

Türev tanımından,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 \sin\frac{1}{(0+h)}}{\cancel{h}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\sin t}{t} = 0$$

$\frac{1}{h} = t$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{-h}}{\cancel{h}} \to 0$$

$f'(0) = 0 \qquad f,\ x=0$ türevlenebilir

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(2-x)^2} = \infty$

$\forall K > 0 \quad 0 < |x-2| < \delta \quad \frac{1}{(2-x)^2} > K$ oluyorsa

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(2-x)^2} = \infty$ olmalıdır. $\quad \delta(K) > 0$

$(2-x)^2 < \frac{1}{K} \Rightarrow |2-x| > \frac{1}{\sqrt{K}}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ $\quad x=0$ da sürekli mi

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 1/2 \neq f(0)$

sürekli değildir.

0251321Matematik 1(3+2)-Final Cevap Anahtarı **(11 Ocak 2012)**

SORU 1-) $y = f(x)$ ise $x.\sec(xy - y^2) + 2y^3 = x^2 + 2$ ile verilen eğrinin A(1,1) noktasındaki teğet ve normal doğrularının denklemini bulunuz.

* Türevi

$$\sec(xy - y^2) + x.(y + xy' - 2yy')\tan(xy - y^2)\sec(xy - y^2) + 6y^2y' = 2x$$ **(5 Puan)**

$$\sec(xy - y^2) + xy\tan(xy - y^2)\sec(xy - y^2) + [(x^2 - 2xy)\tan(xy - y^2)\sec(xy - y^2) + 6y^2].y' = 2x$$

* $y' = \dfrac{2x - \sec(xy - y^2) - xy\tan(xy - y^2)\sec(xy - y^2)}{(x^2 - 2xy)\tan(xy - y^2)\sec(xy - y^2) + 6y^2}$ **(5 Puan)**

* $y'|_A = \dfrac{2.1 - \sec(0) - 1\tan(0)\sec(0)}{(1-2)\tan(0)\sec(0) + 6.1} = \dfrac{1}{6}$ **(2Puan)**

*Teğet Doğrusu $y - 1 = \dfrac{1}{6}(x-1) \Rightarrow y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{5}{6}$ **(4 Puan)**

* Normal Doğrusu $y - 1 = -6(x-1) \Rightarrow y = -6x + 7$ **(4 Puan)**

4. $\ln(x^2 + x + 5)$ fonksiyounun yerel ekstremumlarını ve büküm noktalarını bulunuz.

$f(x) = \ln(x^2 + x + 5)$ olsun. $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + 5}$. $f(x)$ her yerde türevlenebilirdir ve $f'(x)$ sadece $x = -\dfrac{1}{2}$ de 0 değerini alır. $x = -\dfrac{1}{2}$ tek kritik sayıdır. $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 9}{(x^2 + x + 5)^2}$ olduğundan her noktada ikinci türev vardır ve sadece $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}}{2}$ için $f''(x) = 0$ olur.

	$\frac{-1-\sqrt{19}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$	
$f'(x)$	−	−	+	+
$f''(x)$	−	+	+	−
Artan/Azalan	↘	↘	↗	↗
Bükeylik	∩	∪	∪	∩

Y.T.Ü. Mühendislik Bölümleri Matematik I (0251321)
(II. Vize Sınavı, 01 Ağustos 2011)

SORULAR ve ÇÖZÜMLERİ

(1) Eğer $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ ise, f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları tespit ediniz.

Çözüm Verilen fonksiyon, $|x| \le 1$ için tanımlıdır. Türevini bulmak için önce içinin türevini hesaplarız. Eğer $|x| < 1$ olmak üzere $u = \sqrt{1-x^2}$ dersek $u' = -x/\sqrt{1-x^2}$ olur. Dolayısıyla f nin türevi, $|x| < 1$ (ve şimdilik $x \neq 0$) için

$$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = -\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

şeklinde olmalıdır. Son ifade, x in negatif ve pozitif değerlerine göre düzenlenirse,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x \le 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

olacaktır. Neticede verilen fonksiyon, $-1 < x \le 0$ iken artan ve $0 < x < 1$ iken azalandır. ◃

---

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax-x^2)}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+bx}-1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ ile verilen f fonksiyonunun sürekli olması için a ve b sayıları nasıl seçilmelidir?

Çözüm Önce f nin, $x = 0$ da sağdan ve soldan limitlerine bakılır: $x \neq 0$ için

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(ax-x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\sin(ax-x^2)}{ax-x^2}\cdot\frac{ax-x^2}{x}\right] = a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+bx}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(1+bx)-1}{x\left(\sqrt{1+bx}+1\right)} = \frac{b}{2}$$

dir. O halde, verilen fonksiyonun $x = 0$ da sürekli olması için $a = 1 = b/2$ olmalıdır. ◃

(3) $x \geq 0$ için $\arctan\sqrt{e^{2x}-1} + \arcsin e^{-x} = \dfrac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz. Nuran Güzel

Çözüm Eğer $f(x) = \arctan\sqrt{e^{2x}-1} + \arcsin e^{-x}$ dersek,

$$f'(x) = \frac{e^{2x}/\sqrt{e^{2x}-1}}{e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} - \frac{e^{-x}}{e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}} = 0$$

olur. O halde f, ODT'nin ilgili neticesi gereği bir sabittir. Şimdi, $x = 0$ için

$$f(0) = \arctan 0 + \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. ◁ Bir fonk türevi her yerde sıfırsa fonksiyon sabittir

---

(4) Her $x \in (0,\infty)$ için $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm İlk olarak, $0 < x < 1$ olmak üzere bir f fonksiyonunu $f(x) = \ln x$ ile tanımlayalım. Bu takdirde f, $x > 0$ için türevlenebilir olduğundan, ODT'ye göre,

$$\frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} = \frac{1}{c} \quad \text{veya} \quad \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{c}$$

olacak şekilde bir $c \in (x, 1)$ sayısı vardır. Şimdi $x < c$ olduğundan, $\frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ olup,

$$\frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{x} \quad \text{veya} \quad \ln x > \frac{x-1}{x}$$

elde ederiz. Eğer $\overset{x \neq 1}{x = 1}$ ise eşitsizlik, her iki tarafta sıfır olarak, eşitlik halini alır. İkinci olarak, $x > 1$ olsun. Bu kez,

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c} \quad \text{veya} \quad \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{c}$$

olacak şekilde bir $c \in (1, x)$ sayısı mevcuttur ve $c > 1$ olduğundan,

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{c} < 1 \quad \text{den} \quad \ln x < x - 1$$

eşitsizliğine ulaşırız. Eşitsizlik $x = 1$ için de doğrudur ve böylece ispat biter. ◁

---

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln x \cdot \left(e^{1/x} - 1\right)\right]$ limitini hesaplayınız.

Çözüm Eğer limiti alınan ifadeyi

$$\ln x \cdot \left(e^{1/x} - 1\right) = \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \cdot \frac{\ln x}{x} \qquad \frac{X}{X}$$

şeklinde yazarsak,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-1/x^2)\,e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

olup,

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln x \cdot \left(e^{1/x} - 1\right)\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

elde edilir. ◁

(3)

Soru 3 $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ fonksiyonuna $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanabilir mi? Evetse, c sabitini bulunuz.

H. Güzel

$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ fonksiyonu $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ de sürekli 5

$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$ fonksiyonu $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ de türevlenebilir 5

O halde $f'(c) = \dfrac{f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{2 - \frac{1}{2}}$ olacak şekilde bir $c \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ vardır. 5

$$1 - \frac{2}{c^3} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2}{c^3} = \frac{5}{2} \Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{4}{5}} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

5 5

$\approx 0,89$

3) $\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\tan x} = ?} \to 1^\infty$ 2

$y = (\sin x)^{\tan x}$

$\ln y = \tan x \cdot \ln(\sin x)$ 5

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln y = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x \cdot \ln(\sin x)$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-}$ 5 $\frac{\ln(\sin x)}{\cot x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-(1+\cot$

$= \frac{0}{-(1+0)} = 0$ 2

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln y = 0$

$\ln\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} y\right) = 0$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = \underline{1}$ 4

05321556275

$\arctan\sqrt{e^{2x}-1}+\arcsin e^{-x} = \frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{\cot x} = ? \to 1^{\infty}$ (2)

$y = (\cos x)^{\cot x}$

$\ln y = \cot x \cdot \ln(\cos x)$ (5)

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\cos x)}{\tan x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$ (5)

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\tan^2 x}$ (7) $= -\dfrac{0}{1} = 0$ (2)

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = 0$

$\ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+} y\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{\cot x} = e^0 = 1$ (4)

MATEMATİK (3+2) 1. VİZE CEVAP LARI (A)

1-a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{1-x^2}$ limitini hesaplayınız. (**L'Hospital kuralı kullanılmayacak)**

b) $-1 \le x \le 1$ için $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ ise $\lim_{x\to 0} f(x)$ limitini hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{1-x^2}\ \dfrac{0}{0}$ belirsizliği var. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\pi \sin(\pi-\pi x)}{\pi(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\dfrac{\pi}{(1+x)}\dfrac{\sin(\pi-\pi x)}{\pi(1-x)} = \dfrac{\pi}{2}$

yada

$$\lim_{x\to 1}\frac{\pi \sin(\pi-\pi x)}{\pi(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\pi}{(1+x)}\frac{\sin(\pi-\pi x)}{\pi(1-x)}$$

$t = x-1,\ x = 1-t$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\pi \sin \pi t}{\pi t(2-t)} = \frac{\pi}{2}$$

b)

$\lim_{x\to 0}\sqrt{5-2x^2} = \lim_{x\to 0}\sqrt{5-2x^2} = \sqrt{5}$ ve $\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{5}$ olduğundan sıkıştırma teoremine göre

$\lim_{x\to 0}\sqrt{5-2x^2} \le \lim_{x\to 0} f(x) \le \lim_{x\to 0}\sqrt{5-x^2}$ den $\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{5}$ olur.

2-) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun türevini **<u>türev tanımından</u>** hesaplayınız.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)} - \sqrt[3]{x}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{(x+h)} - \sqrt[3]{x}).[(\sqrt[3]{(x+h)})^2 + \sqrt[3]{(x+h)}.\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2]}{h.[(\sqrt[3]{(x+h)})^2 + \sqrt[3]{(x+h)}.\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2]}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h.[(\sqrt[3]{(x+h)})^2 + \sqrt[3]{(x+h)}.\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2]}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{h.[(\sqrt[3]{(x+h)})^2 + \sqrt[3]{(x+h)}.\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2]}$$

$$= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x^2})}$$

3-) Eğer $f(4) = f'(4) = 1$ ise $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x^2)+1}{f(2x)}\right)\Bigg|_{x=2}$ değerini hesaplayınız.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x^2)+1}{f(2x)}\right)\Bigg|_{x=2} = \frac{2x.f'(x^2).f(2x) - 2f'(2x).\left[f(x^2)+1\right]}{[f(2x)]^2}\Bigg|_{x=2}$$

$$= \frac{2.2.f'(4).f(4) - 2.f'(4).\left[f(4)+1\right]}{[f(4)]^2} = \frac{4-4}{1} = 0$$

4-) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ fonksiyonuna $[-1,1]$ aralığında ortalama değer teoreminin uygulanabilirliğini araştırınız. Eğer uygulanabilirse ilgili c değerini bulunuz.

$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ fonksiyonu $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=0=f(-1)$ olup $x=-1$ de sağdan;

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=0=f(1)$ olup $x=1$ de soldan süreklidir ve $x_0\in(-1,1)$ için

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{1-x_0^2}{1+x_0^2}=f(x_0)$ olup $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ **[-1,1]** aralığında süreklidir.

$f'(x)=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$ olup $f'(x)$, $(-1,1)$ de mevcuttur. ODT göre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ \exists c\in(-1,1)$.

$f(-1)=f(1)=0$ olduğundan $\dfrac{-4c}{(c^2+1)^2}=0\Rightarrow -4c=0\ \ c=0\in(-1,1)$

5-) $f(x)=e^{2x+3}$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(1)$ değerini bulunuz.

$(-\dfrac{3}{2},\infty)$ aralığında $f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}>0$ olduğundan artandır ve dolayısıyla tersi mevcuttur.

Şimdi; $(f^{-1})'(0)=x_0\Rightarrow f(x_0)=0$ dan $\ln(2x_0+3)=0\Rightarrow 2x_0+3=1\Rightarrow x_0=-1$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{\dfrac{2}{2(-1)+3}}=\frac{1}{2}$$