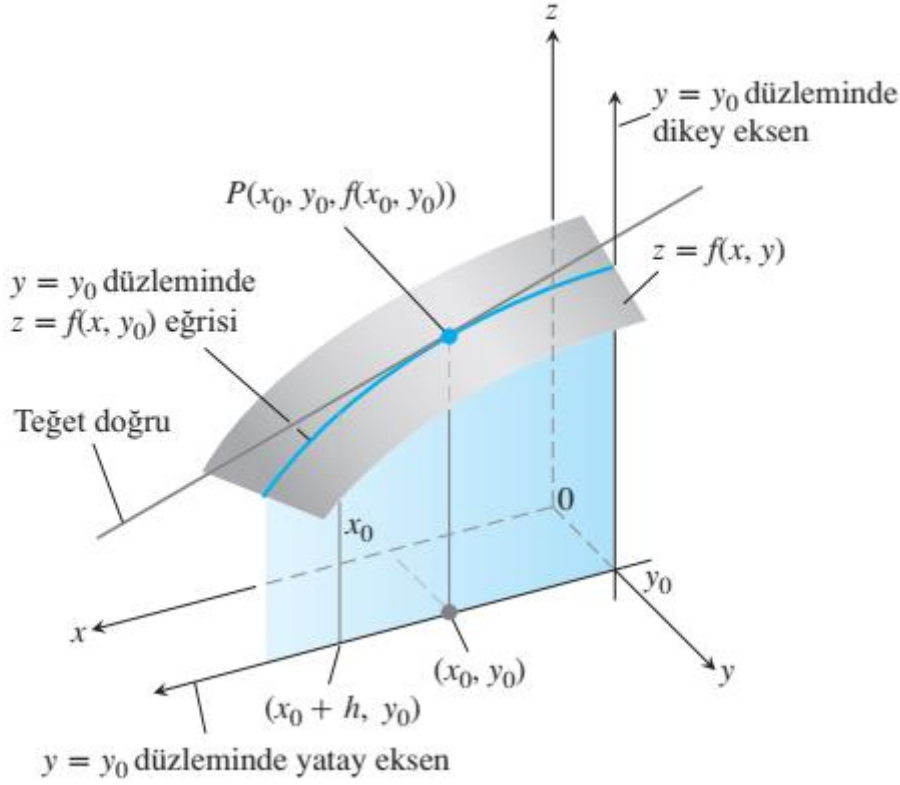


KİSMİ TÜREVLER

Çok değişkenli analiz, temelde tek değişkenli analizin her defasında bir değişkene uygulanmasıdır. Bir fonksiyonun bağımsız değişkenlerinden biri dışında hepsini sabit tutar ve o tek değişkene göre türev alırsak, bir "kısmi" türev elde ederiz tek değişkene göre türev alırsak, bir "kısmi" türev elde ederiz

iki Değişkenli Bir Fonksiyonun Kısmi Türevleri

(x_0, y_0) , bir $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bir noktaysa, dikey $y = y_0$ düzlemi, $z = f(x, y)$ yüzeyini $z = f(x, y_0)$ eğrisinde kesecektir (Şekil 14.13). Bu eğri $y = y_0$ düzlemindeki $z = f(x, y_0)$ fonksiyonunun grafiğidir. Bu düzlemdeki yatay koordinat x ; dikey koordinat z 'dir. y -değeri y_0 'da sabit tutulmaktadır dolayısıyla y bir değişken değildir. f 'nin (x_0, y_0) noktasında, x 'e göre kısmi türevini $f(x, y_0)$ 'ın $x = x_0$ noktasında x 'e göre normal türevi olarak tanımlarız. Kısmi türevleri normal türevlerden ayırt etmek için önceden kullandığımız d yerine ∂ sembolünü kullanırız.



TANIM x 'e Göre Kısmi Türev

$f(x, y)$ 'nin (x_0, y_0) noktasında x 'e göre kısmi türevi, limitin var olması

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

olarak tanımlanır.

$z = f(x, y)$ eğrisinin $y = y_0$ düzleminde $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasındaki eğimi f 'nin (x_0, y_0) 'da x 'e göre kısmi türevinin değeridir. Eğrinin P 'deki teğeti ise $y = y_0$ düzleminde P 'den bu eğimle geçen doğrudur. (x_0, y_0) 'daki $\partial f / \partial x$ kısmi türevi, y değişkeni y_0 değerinde sabit tutulurken f 'nin x 'e göre değişim oranıdır. Bu (x_0, y_0) 'da f 'nin i yönündeki değişim oranıdır.

TANIM y 'ye Göre Kısmi Türev

$f(x, y)$ 'nin (x_0, y_0) noktasında y 'ye göre kısmi türevi, limitin var olması şartıyla

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{d}{dy} f(x_0, y) \right|_{y=y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

olarak tanımlanır.

$z = f(x_0, y)$ eğrisinin dikey $x = x_0$ düzleminde $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasındaki (Şekil 14.14) eğimi, f 'nin (x_0, y_0) 'da y 'ye göre kısmi türevidir. Eğrinin P 'deki teğeti ise $x = x_0$ düzleminde P 'den bu eğimle geçen doğrudur. Kısmi türev, x -değişkeni x_0 değerinde sabit tutulurken f 'nin (x_0, y_0) 'da y 'e göre değişim oranıdır. Bu, (x_0, y_0) 'da f 'nin $\mathbf{j}$ yönündeki değişim oranıdır.

ÖRNEK 1 Bir Noktada Kısmi Türevlerin Bulunması

ise $(4, -5)$ noktasında $\partial f/\partial x$ ve $\partial f/\partial y$ değerlerini bulun:

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1.$$

Çözüm $\partial f/\partial x$ 'i bulmak için, y 'ye bir sabit olarak bakar ve x 'e göre türev alırız:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y$$

$\partial f/\partial x$ 'in $(4, -5)$ 'teki değeri $2(4) + 3(-5) = -7$ 'dir.

$\partial f/\partial y$ 'yi bulmak için, x 'e bir sabit olarak bakar ve y 'ye göre türev alırız:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1 - 0 = 3x + 1$$

$\partial f/\partial y$ 'nin $(4, -5)$ 'teki değeri $3(4) + 1 = 13$ 'tür.

ÖRNEK 2 Bir Kısmi Türevi Bir Fonksiyon Olarak Bulmak

$f(x, y) = y \sin xy$ ise $\partial f/\partial y$ 'yi bulun.

Çözüm x 'e bir sabit, f 'ye de y ve $\sin xy$ 'nin bir çarpımı olarak bakarız:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (y \sin xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \sin xy + (\sin xy) \frac{\partial}{\partial y} (y) \\ &= (y \cos xy) \frac{\partial}{\partial y} (xy) + \sin xy = xy \cos xy + \sin xy. \end{aligned}$$

ÖRNEK 3 Kısmi Türevler Farklı Fonksiyonlar Olabilirler

$$f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$$

ise f_x ve f_y 'yi bulun.

Çözüm f 'ye bir bölüm olarak bakarız. y 'yi bir sabit olarak alırsak,

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{y + \cos x} \right) = \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial x} (2y) - 2y \frac{\partial}{\partial x} (y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(0) - 2y(-\sin x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y \sin x}{(y + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

buluruz. x 'e bir sabit olarak bakmakla

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{y + \cos x} \right) = \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial y} (2y) - 2y \frac{\partial}{\partial y} (y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(2) - 2y(1)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x}{(y + \cos x)^2} \end{aligned}$$

ÖRNEK 4 Kapalı Türev Alma

$$yz - \ln z = x + y$$

denklemini z 'yi x ve y 'nin iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa, ve kısmi türev varsa, $\partial z / \partial x$ 'i bulun.

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x} \ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0$$

$$\left(y - \frac{1}{z}\right) \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

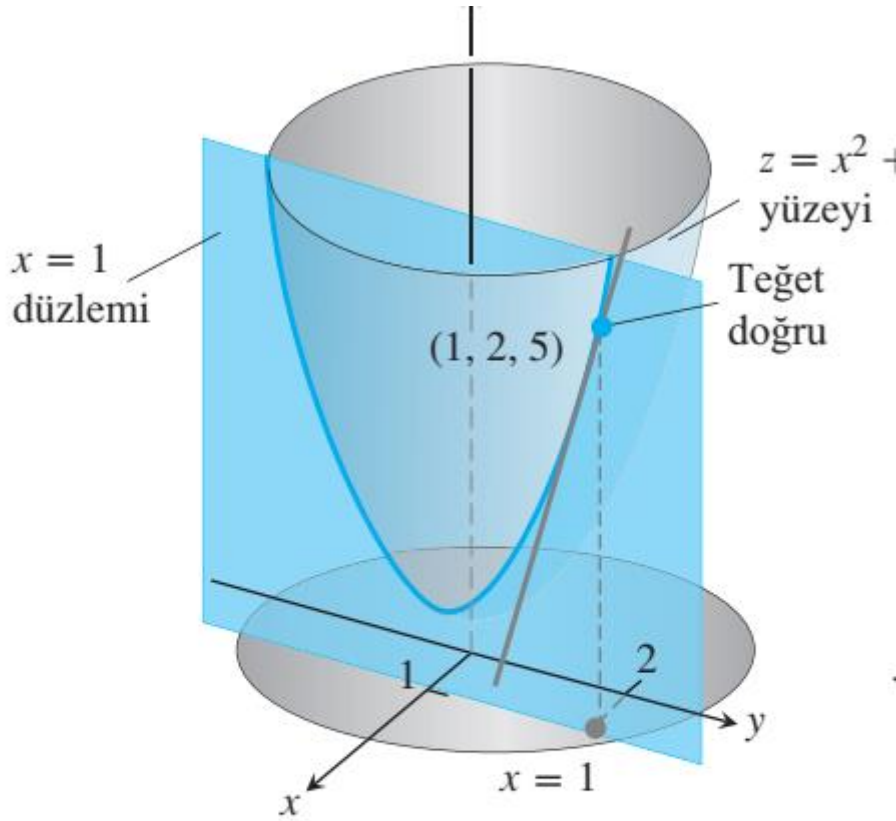
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}.$$

ÖRNEK 5 Bir Yüzeyin y -Yönündeki Eğimini Bulmak

$x = 1$ düzlemi $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle bir parabol üzerinde kesişir. Parabolün $(1, 2, 5)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulun (Şekil 14.16).

Çözüm Eğim, $\partial z / \partial y$ kısmi türevinin $(1, 2)$ 'deki değeridir:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = \left. \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \right|_{(1,2)} = 2y \Big|_{(1,2)} = 2(2) = 4.$$



ŞEKİL 14.16 $x = 1$ düzlemi ile $z = x^2 + y^2$ yüzeyinin kesişim eğrisinin $(1, 2, 5)$ noktasındaki teğeti (Örnek 5).

ÖRNEK 6 Üç Değişkenli Bir Fonksiyon

x, y ve z bağımsız değişkenler ve

$$f(x, y, z) = x \sin (y + 3z)$$

ise,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} [x \sin (y + 3z)] = x \frac{\partial}{\partial z} \sin (y + 3z) \\ &= x \cos (y + 3z) \frac{\partial}{\partial z} (y + 3z) = 3x \cos (y + 3z)\end{aligned}$$

ÖRNEK

Soru 7) Bir f fonksiyonu, $f(0,0) = 0$ ve $(x,y) \neq (0,0)$ için $f(x,y) = \frac{e^{x^3+y^3}-1}{x^2+y^2}$ ile tanımlanıyor
mevcut ise, $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ sayılarını bulunuz. (12 P)

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^3} - 1}{h^3}$$
$$\stackrel{L}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 e^{h^3}}{3h^2} = 1 //$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - 1}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{h^2} - 1}{h^2} \cdot \frac{1}{h} \right)$$

$f_y(0,0)$ Limiti yoktur. Sonsuzdur.

ÖRNEK

b) Eğer mevcut ise, $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^4})$ ile verilen f fonksiyonu için $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ değerlerini (f nin $(0,0)$ noktasında x ve y ye göre 1.mertebe **kısmi türevlerini**) bulunuz. (15 P)

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{h^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin|h|}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-h)}{h} = -1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1 \end{cases}$$

Bu yüzden, $f_x(0,0)$ YOK.

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{h^4}}{h}$$

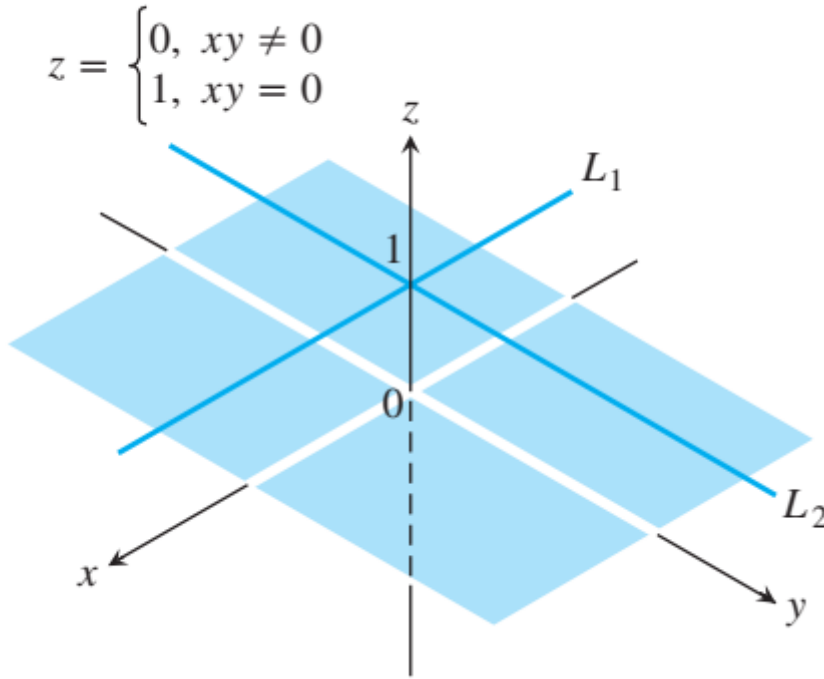
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h^2}{h^2} \cdot h \right) =$$

Kısmi Türevler ve Süreklilik

Kısmi türevlerde, Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi bir türevin varlığının sürekliliği gerektirdiğinden farklıdır. Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir noktada, sürekli olması gerekmeden, hem x hem de y 'ye göre kısmi türevleri var olabilir. Ancak, $f(x,y)$ 'nin kısmi türevleri varsa ve merkezi (x_0, y_0) 'da bulunan bir daire içinde sürekli iseler, f fonksiyonu (x_0, y_0) 'da süreklidir.

ÖRNEK 8 Kısmi Türevler Var, Fakat f Süreksiz olan

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$



yukarıda verilen fonksiyonu gözönüne alalım. (Şekil deki gibi).

(a) (x, y) noktası $y = x$ doğrusu üzerinden $(0, 0)$ 'a yaklaşırken f 'nin limitini bulun.

(b) f 'nin orijinde sürekli olmadığını gösterin.

(c) Orijinde, $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ kısmi türevlerinin ikisinin de var olduğunu gösterin.

a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \Big|_{y=x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0$$

dır. Çünkü $f(x, y)$, $y = x$ doğrusu boyunca (orijin hariç) sabit olarak sıfırdır.

(b) $f(0, 0) = 1$ olduğundan (a)'daki limit fonksiyonun $(0, 0)$ 'da sürekli olmadığını gösterir.

(c) $(0, 0)$ 'da f_x 'i bulmak için y 'yi $y = 0$ 'da sabit olarak tutarız. Bu durumda, her x için $f(x, y) = 1$ dir ve f 'nin grafiği deki L_1 doğrusudur. Bu doğrunun herhangi bir x noktasındaki eğimi $f_x = 0$ dir. Özel olarak, $(0, 0)$ 'da $f_x(0,0) = 0$ 'dır. Benzer şekilde, herhangi bir y noktasında L_2 doğrusunun eğimi f_y 'dir. Dolayısıyla, 'da $f_y(0, 0) = 0$ 'dır.