

Arcsin(x) in türevi

$$Y = \arcsin(x)$$

$$\sin y = x$$

$$y' \cos(y) = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$u = u(x)$ ise

$$\frac{d}{dx} (\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$

ÖRNEK

$$\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx} (x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$y = \arctan(x)$ türevi ($y = \tan^{-1}(x)$)

$$f(x) = \tan x \text{ ve } f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Teorem 1

$$= \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)}$$

$$f'(u) = \sec^2 u$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)}$$

$$\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\tan(\tan^{-1} x) = x$$

$u=u(x)$ ise

$$\frac{d}{dx} (\tan^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}$$

$y = \sec^{-1} u$ 'nin Türevi

$0 < x < \pi/2$ ve $\pi/2 < x < \pi$ için $\sec x$ 'in türevi pozitif olduğundan Teorem 1, ters fonksiyonunun türevlenebildiğini söyler. Teorem 1'deki formülü doğrudan uygulamak yerine $y = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$, fonksiyonun türevini kapalı türev Zincir Kuralını kullanarak aşağıdaki gibi alırız:

$$y = \sec^{-1} x$$

$$\sec y = x$$

Ters Fonksiyon Bağıntısı

$$\frac{d}{dx} (\sec y) = \frac{d}{dx} x$$

İki tarafın da x 'e göre türevi

$$\sec y \tan y \frac{dy}{dx} = 1$$

Zincir Kuralı

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

$|x| > 1, y$ olduğundan
 $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ ve
 $\sec y \tan y \neq 0$

Sonucu x 'e göre ifade etmek üzere

$$\sec y = x \quad \text{ve} \quad \tan y = \pm \sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

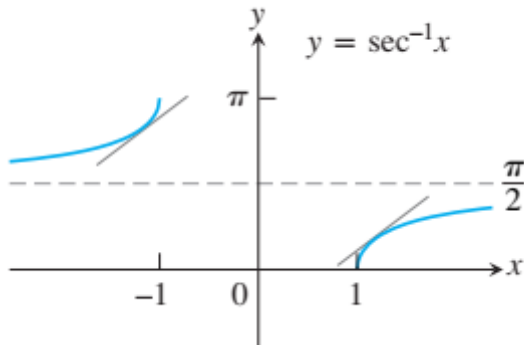
bağıntılarını kullanarak

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \begin{cases} + \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{if } x > 1 \\ - \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{if } x < -1. \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\frac{d}{dx} (\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1.$$



eğiminin daima pozitif

ÖRNEK

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sec^{-1}(5x^4) &= \frac{1}{|5x^4| \sqrt{(5x^4)^2 - 1}} \frac{d}{dx} (5x^4) \\
 &= \frac{1}{5x^4 \sqrt{25x^8 - 1}} (20x^3) \quad 5x^4 > 0 \\
 &= \frac{4}{x \sqrt{25x^8 - 1}}
 \end{aligned}$$

Ters Fonksiyon–Ters Co-fonksiyon Özdeşlikleri

$$\cos^{-1} x = \pi/2 - \sin^{-1} x$$

$$\cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x$$

$$\csc^{-1} x = \pi/2 - \sec^{-1} x$$

$$\frac{d}{dx} (\cos^{-1} x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x \right) \quad \text{Özdeşlik}$$

$$= -\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{arcsinüs'ün türevi}$$

ÖRNEK

Arccot(x) eğrisine $x=-1$ de teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

$$\cot^{-1}(-1) = \pi/2 - \tan^{-1}(-1) = \pi/2 - (-\pi/4) = 3\pi/4.$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1} = - \left. \frac{1}{1+x^2} \right|_{x=-1} = - \frac{1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

teğetin denklemi $y - 3\pi/4 = (-1/2)(x + 1)$ dir.

Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri

$$1. \quad \frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

$$2. \quad \frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = - \frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

$$3. \quad \frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{1+u^2}$$

$$4. \quad \frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = - \frac{du/dx}{1+u^2}$$

$$5. \quad \frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{|u| \sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

$$6. \quad \frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u| \sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

ÖRNEK

$$y = \tan^{-1} \sqrt{x^2-1} + \csc^{-1} x$$

Türevi

$$\begin{aligned} y &= \tan^{-1} \sqrt{x^2-1} + \csc^{-1} x = \tan^{-1} (x^2-1)^{1/2} + \csc^{-1} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(x^2-1)^{-1/2}(2x)}{1+[(x^2-1)^{1/2}]^2} - \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} = 0, \text{ for } x > 1 \end{aligned}$$

ÖRNEK

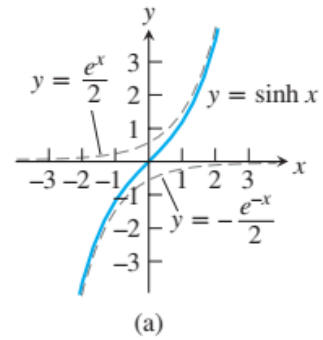
$$y = \cot^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) - \tan^{-1} x$$

$$y = \cot^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) - \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} (x^{-1}) - \tan^{-1} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{-x^{-2}}{1+(x^{-1})^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

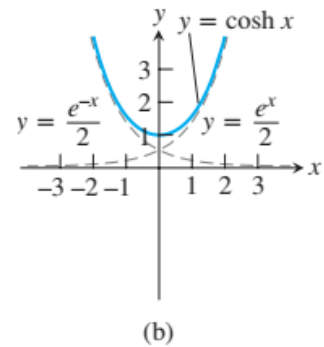
HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

Hiperbolik fonksiyonlar, e^x ve e^{-x} eksponansiyel fonksiyonlarının kombinasyonları ile oluşturulurlar. Hiperbolik fonksiyonlar bir çok matematiksel ifadeyi basitleştirirler ve uygulamalarda önemlidirler. Örneğin, bir elektrik iletim hattında olduğu gibi, iki ucundan asılmış bir kablodaki gerilmeleri hesaplama gibi problemlerde kullanılırlar. Ayrıca, diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmada önemli rol oynarlar.

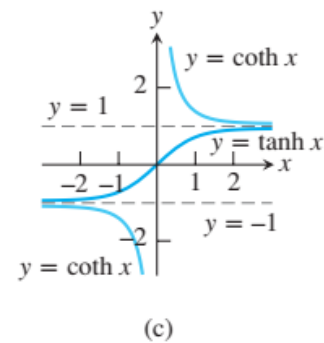
x 'in sinüs hiperboliği: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



x 'in kosinüs hiperboliği: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

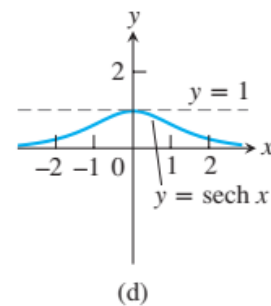


Tanjant hiperbolik: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

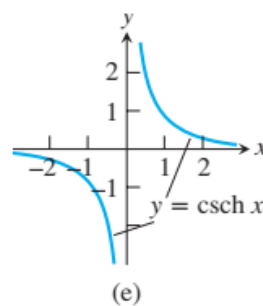


Kotanjant hiperbolik: $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Sekant hiperbolik: $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$



Kosekant hiperbolik: $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sinh u) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) \\ &= \frac{e^u du/dx + e^{-u} du/dx}{2} \\ &= \cosh u \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

$\sinh u$ 'nin tanımı

e^u 'nin türevi

$\cosh u$ 'nin tanımı

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sinh u} \right)$$

$\operatorname{csch} u$ 'nun tanımı

$$= -\frac{\cosh u}{\sinh^2 u} \frac{du}{dx}$$

Bölüm Kuralı

$$= -\frac{1}{\sinh u} \frac{\cosh u}{\sinh u} \frac{du}{dx}$$

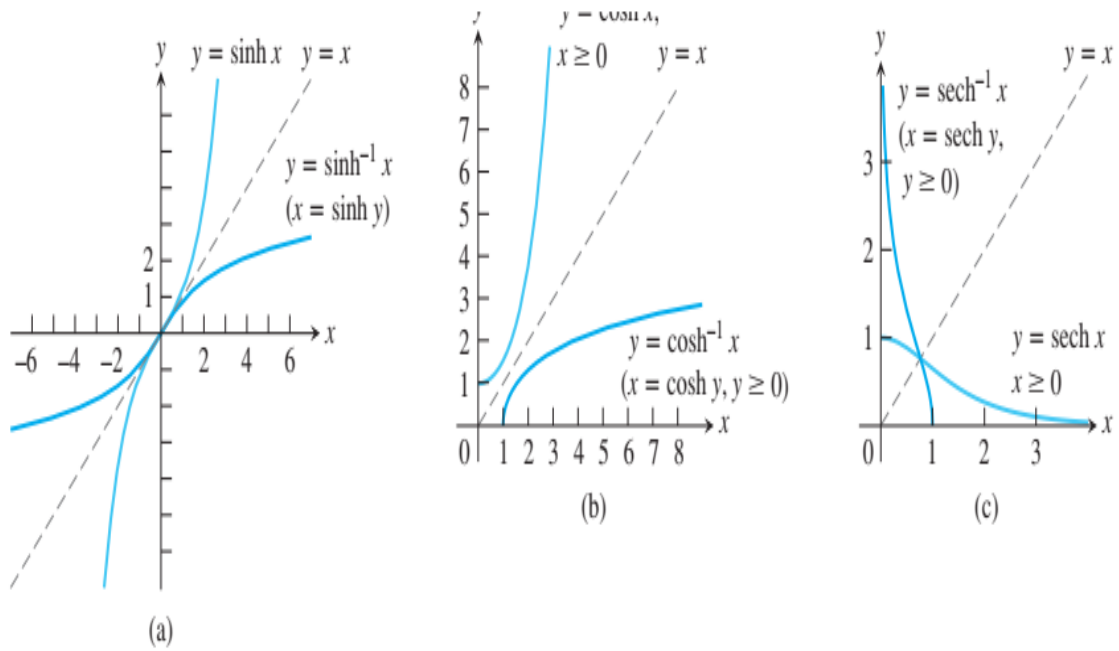
Terimleri yeniden yazmak

$$= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

$\operatorname{csch} u$ ve $\coth u$ 'nin tanımı

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{d}{dt} \left(\tanh \sqrt{1+t^2} \right) &= \operatorname{sech}^2 \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sqrt{1+t^2} \right) \\ &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{sech}^2 \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

Ters hiperbolik fonksiyonların grafikleri

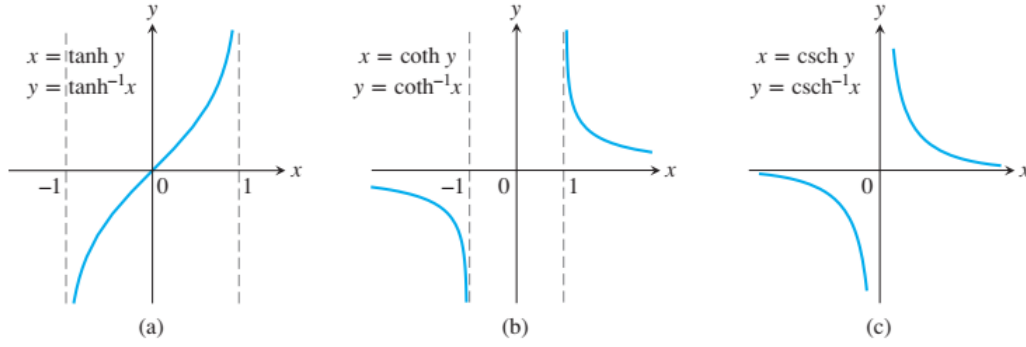


Ters sinüs, kosinüs ve sekant hiperboliğin grafikleri. $y = x$ doğrusuna göre simetrilere dikkat edin.

Tanjant, kotanjant ve kosecant hiperbolik fonksiyonları tanım aralıklarında bire-bir dir ve

$$y = \tanh^{-1} x, \quad y = \coth^{-1} x, \quad y = \operatorname{csch}^{-1} x$$

ile tanımlanan tersleri vardır. Bu fonksiyonların grafikleri Şekil 7.33'te verilmektedir.



Ters tanjant, kotanjant ve kosecant hiperboliğin grafikleri.

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{sech} \left(\cosh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{1}{\cosh \left(\cosh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} \right)} = x$$

$$\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \quad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \quad u \neq 0$$

$$\frac{d}{dx} (\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

olduğunu gösterelim

Önce $x > 1$ için, $f(x) = \cosh x$ ve $f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x$ ile Teorem 1'i uygulayarak

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Teorem 1

$$= \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1} x)}$$

$$f'(u) = \sinh u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}}$$

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1,$$

$$\sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}$$

$$\cosh(\cosh^{-1} x) = x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}.$$

yada

$$y = \cosh^{-1} x$$

$$x = \cosh y$$

Eşdeğer denklem

$$1 = \sinh y \frac{dy}{dx}$$

x 'e göre türev alma ve
Zincir Kuralı

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}}$$

$x > 1$ olduğu için,
 $y > 0$ ve $\sinh y > 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\cosh y = x$$