

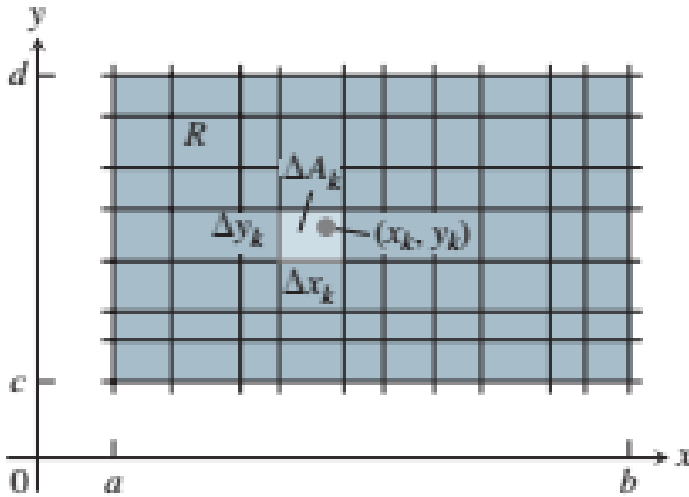
KATLI İNTEGRALLER

İki değişkenli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun, düzlemde bir bölge üzerindeki integralini ve üç değişkenli bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun, uzayda bir bölge üzerindeki integraline katlı integral denir. İki değişkenli sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun, düzlemde sınırlı bir R bölgesi üzerindeki integralini yakınsayan Riemann toplamının limiti olarak tanımlayabiliriz(mat 1 de olduğu gibi).

Düzlemsel bir R bölgesini küçük dikdörtgenlere bölerek, her dikdörtgenin alanını, dikdörtgen içindeki bir noktada f 'nin değeri ile çarpar ve sonunda bütün bu çarpımları toplarız. f sürekli olduğundan, her küçük dikdörtgen hem boydan hem enden küçülürken, bu toplamalar bir tek sayıya yakınsar. Bu limit değerine, f 'nin R üzerindeki iki katlı integrali denir.

Dikdörtgenler Üzerinde iki Katlı integraller

Dikdörtgensel bir R , $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ bölgesi üzerinde tanımlı bir $f(x, y)$ fonksiyonu olsun. R bölgesini, x - ve y -eksenlerine paralel doğrularla küçük dikdörtgenlere bölelim.



Genişliği Δx ve yüksekliği Δy olan küçük bir dikdörtgenlerin alanı $\Delta A = \Delta x \Delta y$ dir. k . dikdörtgenin alanı da $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ dir ve bu küçük dikdörtgenlerden n tane olsun $n \rightarrow \infty$ gittikçe

dikdörtgenlerin alanı sıfıra gidecektir. R üzerinde bir Riemann toplamı oluşturmak için k . küçük dikdörtgenin içinde bir (x_k, y_k) noktasındaki fonksiyonun değeri, $f(x_k, y_k)$ ile ΔA_k alanını çarpımı tabanı ΔA_k olan ve yüksekliği $f(x_k, y_k)$ olan dikdörtgenler prizmasının hacmini verir.

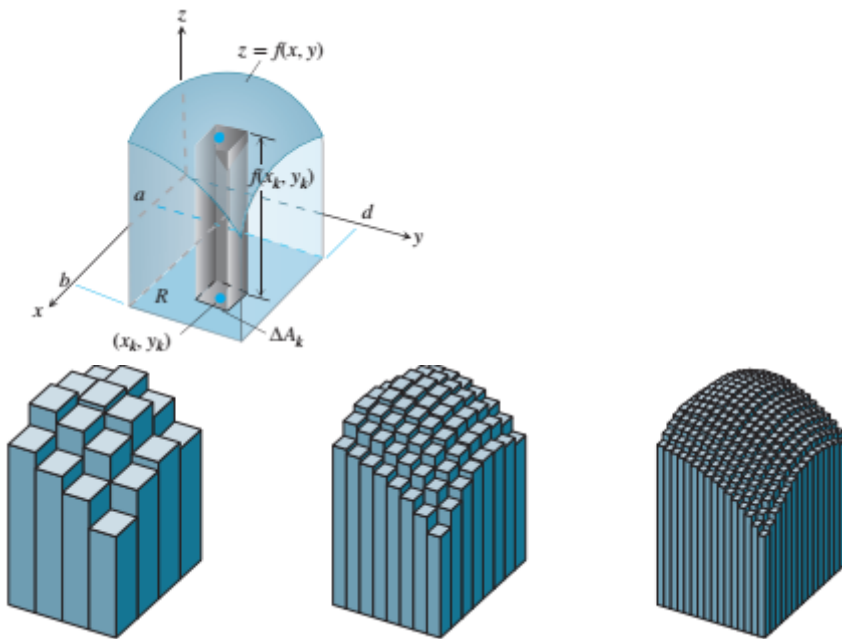
$$\Delta V_k = f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

$$\sum_{k=1}^n \Delta V_k = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

P bölünüşünün, $\|P\|$ **norm**'u, bölünen dikdörtgenler prizmasının hacminin en büyüğü olsun.

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|P\| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|P\| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

$f(x, y)$, xy -düzleminde dikdörtgensel bir R bölgesi üzerinde pozitif bir fonksiyon olsun, bu durumda, f 'nin R bölgesi üzerindeki iki katlı integralini, xy -düzleminin üst tarafında; alttan R bölgesi ile ve üstten $z = f(x, y)$ ile sınırlandırılmış cismin hacmi olarak yorumlayabiliriz.



$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|P\| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|P\| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA$$

İki Katlı integralde Fubini teoremi (R dikdörtgen ise)

TEOREM 1 Fubini Teoremi (Birinci Şekli)

$f(x, y)$, R : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ dikdörtgen bölgesinde sürekliyse,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

olur.

ÖRNEK:

$f(x, y) = 1 - 6x^2y$ ve R : $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$ için $\iint_R f(x, y) dA$ 'yı hesaplayın.

Çözüm Fubini teoremiyle,

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 [x - 2x^3y]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy = [2y - 8y^2]_{-1}^1 = 4 \end{aligned}$$

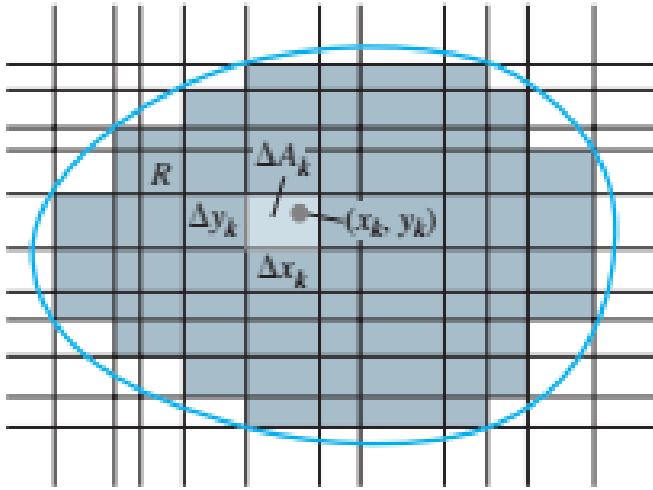
bulunur. İntegrasyon sırasını değiştirmek de aynı sonucu verir:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-1}^1 (1 - 6x^2y) dy dx &= \int_0^2 [y - 3x^2y^2]_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 [(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)] dx \\ &= \int_0^2 2 dx = 4. \end{aligned}$$

Dikdörtgensel Olmayan Sınırlı Bölgede İki Katlı İntegraller

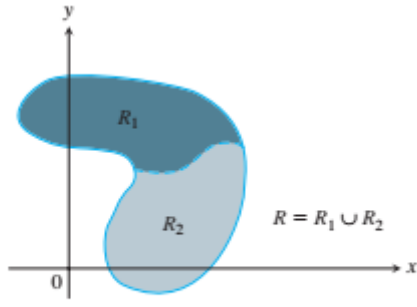
Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun, dikdörtgensel olmayan, sınırlı bir bölge üzerindeki iki katlı integralini için, R' bölgesini, küçük

dikdörtgensel bölgelere ayırılım. R 'nin, sınırı eğrisel olduğundan ve bazı küçük dikdörtgenler kısmen R 'nin dışında kaldığından, kısmen ya da tamamen dışarıda kalan küçük dikdörtgenlerin hiçbirini kullanmadan, tamamen R 'nin içinde kalan dikdörtgenler alınarak oluşturulur. Bölünüşün normu (kullanılan dikdörtgenlerin genişliklerinin veya yüksekliklerinin en büyüğü) sıfıra yaklaşırken, R 'nin içerdiği dikdörtgenlerin sayısı giderek artacaktır. yani $\|P\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ olur.



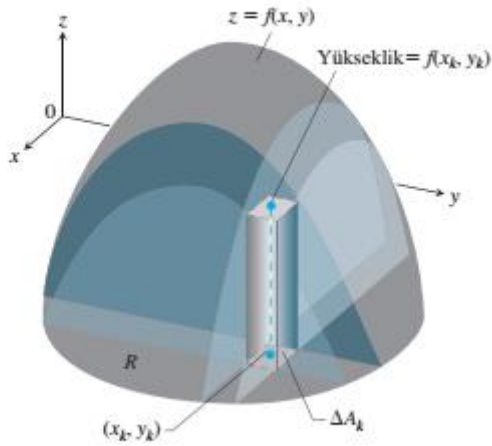
$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA$$

Bu limite katlı integral diyoruz.



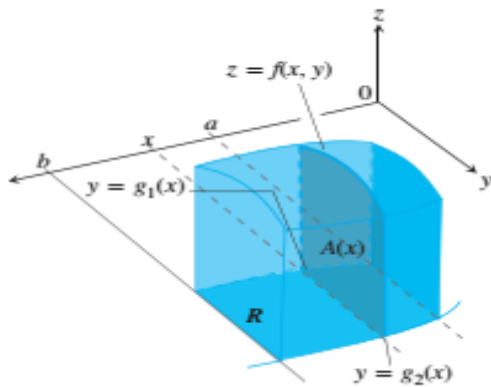
$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$



$$\text{Hacim} = \lim \sum f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA$$

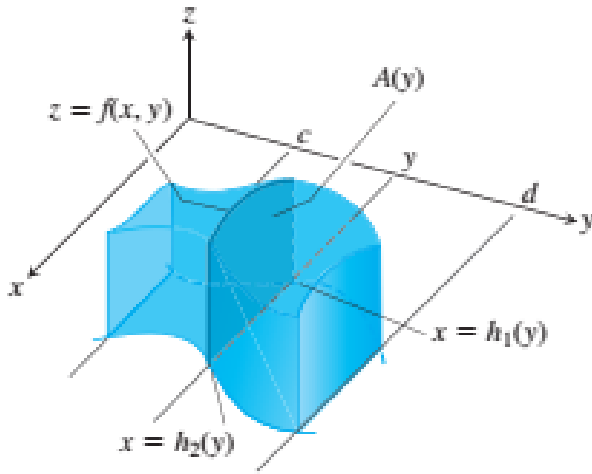
$f(x, y)$ yüzeyi pozitifse ve R bölgesi üzerinde süreklilyse, R ile $z = f(x, y)$ yüzeyi arasındaki katı bölgenin hacmini(yukarıda verilen şekil) $V = \iint_R f(x, y) dA$ dır.



R, xy-düzleminde “üstten” ve “alttan” $y = g_1(x)$ ve $y = g_2(x)$ eğrileri ve yanlardan $x = a$, $x = b$ doğruları ile sınırlı olsun.

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy$$

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_{x=a}^{x=b} A(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



R, xy-düzleminde “üstten” ve “alttan” $x = h_1(y)$ ve $x = h_2(y)$ eğrileri ve yanlardan $y = c$, $y = d$ doğruları ile sınırlı olsun. (yukarıdaki şekildeki gibi) bu durumda;

$$A(y) = \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x, y) dx$$

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_{y=c}^{y=d} A(y) dy = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

TEOREM 2 Fubini Teoremi (Daha Kuvvetli Şekil)

$f(x, y)$ bir R bölgesi üzerinde sürekli olsun.

1. R , g_1 ve g_2 $[a, b]$ 'de sürekli olmak üzere, $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ ile tanımlanıyorsa,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

olur.

2. R , h_1 ve h_2 $[c, d]$ 'de sürekli olmak üzere, $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ ile tanımlanıyorsa,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

olur.