

x=a noktası civarında Taylor serisi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

Şeklindedir. x=a yerine x=0 da Taylor seri açılımına **Maclaurin serisi**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots,$$

şeklindedir.

Sık Kullanılan bazı Taylor Seri Açılımı

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-x)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

##

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$$

Yakınsalık aralığı

$$-\pi/2 < x < \pi/2$$

serisi veriliyor. $\ln|\sec(x)|$ fonksiyonunu serisini bulunuz. yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\ln |\sec x| + C = \int \tan x \, dx = \int \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \frac{17x^8}{2520} + \frac{31x^{10}}{14,175} + \dots + C; x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln |\sec x| = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \frac{17x^8}{2520} + \frac{31x^{10}}{14,175} + \dots,$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

##

$\tan(x)$ seriyeye açılımını kullanarak $f(x) = \sec^2 x$ fonksiyonunu seriyeye açınız.

$$\sec^2 x = \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots \right) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{62x^8}{315} + \dots$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Yada

$$\sec^2 x = (\sec x)(\sec x) = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots \right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) x^2 + \left(\frac{5}{24} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24} \right) x^4 + \left(\frac{61}{720} + \frac{5}{48} + \frac{5}{48} + \frac{61}{720} \right) x^6 + \dots$$

$$= 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{62x^8}{315} + \dots, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

##

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Serisi veriliyor.

$\ln|\sec x + \tan x|$ fonksiyonunun kuvvet serisinin ilk beş terimini bulup, yakınsaklık aralığını yazınız

$$\ln |\sec x + \tan x| + C = \int \sec x \, dx = \int \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots \right) dx$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + \frac{61x^7}{5040} + \frac{277x^9}{72,576} + \dots + C; x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln |\sec x + \tan x|$$

Nuran GÜZEL

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + \frac{61x^7}{5040} + \frac{277x^9}{72,576} + \dots, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

sec x.tan x fonksiyonunun kuvvet serisinin ilk beş terimini bulup, yakınsaklık aralığını yazınız

$$\sec x \tan x = \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots \right) = x + \frac{5x^3}{6} + \frac{61x^5}{120} + \frac{277x^7}{1008} + \dots,$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

İçin yakınsar. Yada

$$\begin{aligned} (\sec x)(\tan x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots \right) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \right) \\ &= x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) x^3 + \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6} + \frac{5}{24} \right) x^5 + \left(\frac{17}{315} + \frac{1}{15} + \frac{5}{72} + \frac{61}{720} \right) x^7 + \dots = x + \frac{5x^3}{6} + \frac{61x^5}{120} + \frac{277x^7}{1008} + \dots \\ &-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$f(x) = \ln(1+x)$ fonksiyonunun

Sıfırıncı, birinci, ikinci ve üçüncü dereceden $x=0$ noktasındaki Taylor polinomunu yazınız.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 \\ &+ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, f''(x) = -(1+x)^{-2}, f'''(x) = 2(1+x)^{-3}; f(0) = \ln 1 = 0, \\ f'(0) &= \frac{1}{1} = 1, f''(0) = -(1)^{-2} = -1, f'''(0) = 2(1)^{-3} = 2 \Rightarrow P_0(x) = 0, P_1(x) = x, P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}, P_3(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

##

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

Fonksiyonunu maclaurin serisine açınız.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x)^{-2}, f''(x) = 2(1-x)^{-3}, f'''(x) = 3!(1-x)^{-4} \Rightarrow f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}; \\ f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2, f'''(0) = 3! \Rightarrow \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$$

##

$$f(x) = 2^x :$$

Fonksiyonunu x=1 noktasında taylor serisine açınız.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

$$f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2, f''(x) = 2^x (\ln 2)^2, f'''(x) = 2^x (\ln 2)^3 \Rightarrow f^{(n)}(x) = 2^x (\ln 2)^n; f(1) = 2, f'(1) = 2 \ln 2, \\ f''(1) = 2 (\ln 2)^2, f'''(1) = 2 (\ln 2)^3, \dots, f^{(n)}(1) = 2 (\ln 2)^n \\ \Rightarrow 2^x = 2 + (2 \ln 2)(x-1) + \frac{2(\ln 2)^2}{2} (x-1)^2 + \frac{2(\ln 2)^3}{3!} (x-1)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(\ln 2)^n (x-1)^n}{n!}$$

##

seri açılımını kullanarak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} ?$$

Limitinin değeri nedir

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{7} - \dots) = \frac{1}{3}$$

##

$\sin^2 x = (\frac{1 - \cos 2x}{2})$ eşitliğini kullanarak seriye açınız ayrıca türevini alarak $\sin 2x$ seri açılımı bulunuz

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots \right) = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} (\sin^2 x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots \right) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \dots \Rightarrow 2 \sin x \cos x \\ &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \dots = \sin 2x, \end{aligned}$$

##

$$\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$$

Fonksiyonunun $x=0$ noktasında Taylor seri açılımı yazınız.

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x = \frac{x^2}{2} - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^2}{2} - 1 + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \\ &= \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Nuran GÜZEL

##

$$x \cos \pi x$$

Fonksiyonunun x=0 noktasında Taylor seri açılımı yazınız

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow x \cos \pi x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!} = x - \frac{\pi^2 x^3}{2!} + \frac{\pi^4 x^5}{4!} - \frac{\pi^6 x^7}{6!} + \dots$$

##

$$x^2 \cos (x^2) :$$

Fonksiyonunun x=0 noktasında Taylor seri açılımı yazınız

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow x^2 \cos (x^2) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n)!} = x^2 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{10}}{4!} - \frac{x^{14}}{6!} + \dots$$

##

$$x \ln (1 + 2x) :$$

Fonksiyonunun x=0 noktasında Taylor seri açılımı yazınız

$$x \ln (1 + 2x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n x^{n+1}}{n} = 2x^2 - \frac{2^2 x^3}{2} + \frac{2^3 x^4}{4} - \frac{2^4 x^5}{5} + \dots$$

##

$$e^{-x/2} =$$

Fonksiyonunun $x=0$ noktasında Taylor seri açılımı yazınız

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x/2} = 1 + \left(\frac{-x}{2}\right) + \frac{\left(\frac{-x}{2}\right)^2}{2!} + \dots = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 2!} - \frac{x^3}{2^3 3!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}$$

Nuran GÜZEL