

Soru 1. a) Ardışık olarak, $a_1 = \frac{1}{2}$ ve $n \geq 1$ doğal sayısı için $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1$ ile verilen $\{a_n\}$ dizisi için

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ olduğu bilindiğine göre $\left\{ \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} \right\}$ dizisinin limitini bulunuz. (7puan)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+a_n}-2}{a_n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3+a_n}-2)(\sqrt{3+a_n}+2)}{(a_n-1)(\sqrt{3+a_n}+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n-1)}{(a_n-1)(\sqrt{3+a_n}+2)} = \frac{1}{4}$$

b) Aşağıdaki serilerin yakınsak veya ıraksak olup olmadıklarını belirleyiniz. (9+9 puan)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-1}$
 $= e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1$ old. YAK.

ii) $b_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Limit karşılaştırma testinden
(her iki seri aynı karakterde)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ıraksaktır.}$$

Başarılar dilerim.

3. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{-n}}{\cos(n\pi)}$ serisinin toplamını bulunuz. (10 puan)

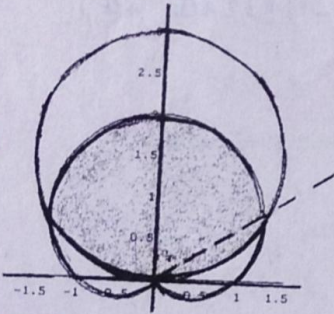
$$\frac{\pi^{-n}}{\cos(n\pi)} = 1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^3} + \dots + (-1)^n \pi^{-n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n$$

Geometrik seridir. Burada $a=1$ $r=-\frac{1}{\pi}$ dir.

$|r| < 1$ olduğundan serinin toplamı

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{\pi})} = \frac{\pi}{\pi+1}$$

b) $r = 3 \sin \theta$ ve $r = 1 + \sin \theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak bölgenin alanını (belirli integral ile) hesaplayınız. (Şekil çizilecektir) (15 puan)



$$3 \sin \theta = 1 + \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (3 \sin \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \sin \theta)^2 d\theta$$

$$A = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/6} (1 - \cos 2\theta) d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(1 + 2 \sin \theta + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$A = \frac{9}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/6} + \left[\theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$A = \frac{9}{2} \left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right] + \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{12} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$A = \frac{5\pi}{4} \text{ br}^2$$

Soru 2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{k^2 \ln k}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. Bu aralığın uç noktalarını inceleyiniz. (25puan)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(3-2x)^{k+1}}{(k+1)^2 \ln(k+1)} \cdot \frac{k^2 \ln k}{(3-2x)^k} \right|$$

$$= |3-2x| \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \cdot \frac{\ln k}{\ln(k+1)} \right] = |3-2x| \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$-1 < 3-2x < 1$$

$$\boxed{1 < x < 2}$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\ln(k+1)} \stackrel{L}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = 1 \right)$$

$x=1$ için $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi

$b_k = \frac{1}{k^2}$ olmak üzere $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $p=2>1$ yak.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln k} = 0$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ serisi yak. olduğundan $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi

$x=2$ için $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 \ln k}$ alterne seri

i) $b_k = \frac{(-1)^k}{k^2 \ln k}$ olmak üzere $k \geq 2$ için $\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{k^2}{(k+1)^2}$

ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2 \ln k} = 0$

olup alterne seri yakınsaktır. Sonuç olarak Y.A $\boxed{1 < x < 2}$