

$$3-) y = 3x - 9x^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = 3 - \frac{3}{x^{2/3}} = \frac{3x^{2/3} - 3}{x^{2/3}} = 0$$

$$x^{2/3} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ kritik nokta}$$

$$x = 0 \text{ tekil nokta}$$

$$y'' = \frac{2}{x^{5/3}}$$

$$f''(1) = 2 > 0, (1, -6) \text{ min. nokta}$$

$$f''(-1) = -2 < 0, (-1, 6) \text{ max. nokta}$$

$x = 0$ tekil nokta için:

$0 < h < 1$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} f'(0-h) &= 3 - \frac{3}{(0-h)^{2/3}} < 0 \\ f'(0+h) &= 3 - \frac{3}{(0+h)^{2/3}} < 0 \end{aligned} \right\} \text{ olduğundan}$$

$x = 0$ 'da
max. min.
nokta yok.

$$f''(0-h) = \frac{2}{(0-h)^{5/3}} = \frac{-2}{h^{5/3}} < 0$$

$$f''(0+h) = \frac{2}{(0+h)^{5/3}} = \frac{2}{h^{5/3}} > 0$$

İşlerinden $(0, 0)$ büküm noktası

$$1-) y = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{1/x^2} \rightarrow 1^{\infty}$$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3 \tan^2 x)}{x^2} \stackrel{0/0}{=}$$

$$\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \tan x \cdot \sec^2 x}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x \cdot \sec^2 x}{x(1 + 3 \tan^2 x)}$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x(1 + 3 \tan^2 x) \cos^2 x}$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 3$$

$$\ln y = 3$$

$$y = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{1/x^2} = e^3$$

2-a) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1/3}$ denkleminin köklerini bulunuz.

-b) $f(x) = \arcsin \frac{2x-1}{5} + \ln(4x-x^2)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

2) $\arcsin$ T.K: $[-1, 1]$ D.K: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 'dir

$$-1 \leq \frac{2x-1}{5} \leq 1$$

$$-5 \leq 2x-1 \leq 5$$

$$-4 \leq 2x \leq 6$$

$$-2 \leq x \leq 3$$

$$x \in [-2, 3] \checkmark$$

10

NURAN GÜZEL

$$\ln(4x-x^2) \quad 4x-x^2 \geq 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$4x-x^2 > 0$$

Tanım kümesi 2.0'dur

$$x(4-x) > 0$$

$x \neq 0$ olma

$x \neq 4$

$$4-x > 0$$

$$x < 4$$

$$x \in (0, 4) \checkmark 10$$

Tanım kümesi hem $\arcsin$ 'i hem de $\ln$ tanımlı olmak zorundadır. Bu yüzden ortak tanımlı olduğu aralıktır.

$$(0, 3] \checkmark 5$$

(24 p) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız. (L'Hospital kuralı kullanılmayacak!)

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(2x) + x^2}{4x^2 + \cos x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 8x + 8}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(2x) + x^2}{4x^2 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin^2(2x)}{x^2} + 1}{4 + \frac{\cos x}{x^2}} = \frac{1}{4}$

NURAN GÜZEL

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 8x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{2(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)}{2(x-2)}$ Sağdan ve soldan limit

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+3)}{2(x-2)} = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+3)}{2(x-2)} = -\infty$ olduğundan limit değeri yoktur.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \cos x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2.$

4) $f(x) = (\cos x)^x - x^{\cos x} + e^{\arctan(\frac{1}{x})}$ ise $df(x)$ 'i bulunuz.
Çözüm.

$$df(x) = f'(x) dx$$

NURAN GÜZEL

$$f(x) = e^{x \ln \cos x} - e^{\cos x \ln x} + e^{\arctan(\frac{1}{x})}$$

$$f'(x) = e^{x \ln \cos x} \cdot \left[\ln \cos x + x \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x} \right] +$$

$$- e^{\cos x \ln x} \cdot \left[-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right] +$$

$$+ e^{\arctan(\frac{1}{x})} \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

→ $df(x)$ de $f'(x)$ 'i yerine koy

1) $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ ise $(f^{-1})'(-2)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm:

NURAN GÜZEL

$$\begin{aligned} f(x) &= x(3+x^2)^{1/2} \Rightarrow f'(x) = (3+x^2)^{1/2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (3+x^2)^{-1/2} \cdot 2x \\ f'(x) &= (3+x^2)^{1/2} + \frac{x^2}{(3+x^2)^{1/2}} = \frac{3+x^2+x^2}{(3+x^2)^{1/2}} = \frac{3+2x^2}{(3+x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ARTAN $\Rightarrow f$ 1-1 $\Rightarrow f$ m
tersi f^{-1} VARDIR.

$$-2 = x\sqrt{3+x^2} \Rightarrow x = -1.$$

$$f'(-1) = \frac{3+2}{(3+1)^{1/2}} = \frac{5}{2}$$

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{2}{5}$$

7

2) $f'(4)=3$, $g'(4)=7$, $g(4)=4$, $x \neq 4$ için $g(x) \neq 4$ olduğuna göre,

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{g(x)-4}$ değerini bulunuz.

NURAN GÜZEL

Çözüm.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{g(x)-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{g(x)-g(4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{f(x)-f(4)}{x-4}}{\frac{g(x)-g(4)}{x-4}} \\ &= \frac{f'(4)}{g'(4)} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

3.a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$ limitini bulunuz.

$$\frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} = \frac{(3 - \sqrt{5+x})(3 + \sqrt{5+x})(1 + \sqrt{5-x})}{(1 - \sqrt{5-x})(3 + \sqrt{5+x})(1 + \sqrt{5-x})} = \frac{(9 - (5+x))(1 + \sqrt{5-x})}{(1 - (5-x))(3 + \sqrt{5+x})} = \frac{(4-x)(1 + \sqrt{5-x})}{(x-4)(3 + \sqrt{5+x})} =$$

$$= -\frac{1 + \sqrt{5-x}}{3 + \sqrt{5+x}}, (x \neq 4) \text{ olduğundan } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{1 + \sqrt{5-x}}{3 + \sqrt{5+x}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \text{ elde edilir.}$$

NURAN GÜZEL

b) $f(x) = x^5 + 2x$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $g'(3)$ değerini hesaplayınız.

Öncelikle $f'(x) = 5x^4 + 2$ dir. $b = f(a)$ olmak üzere $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ olur. $x^5 + 2x = 3$

denkleminin tek çözümü $x = 1$ olduğundan $g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}$ elde edilir.

a)

yadı:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}} \text{ limitini bulunuz.}$$

t =

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{\cos \frac{\pi x}{2} (1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \frac{\cos \frac{\pi x}{2} (1 + \sqrt{x})}{1 - x}.$$

NURAN GUZEL

b) $t = x - 1$ olsun. $x \rightarrow 1$ iken $t \rightarrow 0$ ve $x \neq 1$ için $t \neq 0$ olduğundan değişken değişikliği yapabiliriz.

2-)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2} (1 + \sqrt{x})}{1 - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi(1+t)}{2} (1 + \sqrt{1+t})}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2} \right) (1 + \sqrt{1+t})}{-t} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi t}{2} (1 + \sqrt{1+t})}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi t}{2} (1 + \sqrt{1+t})}{t}$$

in
→ t

$s = \frac{\pi t}{2}$ olsun. $t \rightarrow 0$ iken $s \rightarrow 0$ ve $t \neq 0$ için $s \neq 0$ olduğundan değişken değişikliği yapabiliriz.

n
→ t

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi t}{2} (1 + \sqrt{1+t})}{t} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin s \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2s}{\pi}} \right)}{s} = \pi.$$

$$2) y = e^t \quad t = \ln u \quad u = x^2 \quad x = e \text{ is'n}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= e^t \cdot \frac{1}{u} \cdot 2x = e^{\ln x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot 2x = \underline{2e}$$

NURAN GUZEL

$$3) f(x) = 2^{3x+2} \quad f'(m) = \ln 4^{48} \quad m = ?$$

$$\ln f(x) = (3x+2) \ln 2$$

$$f'(x) = 2^{3x+2} \cdot 3 \cdot \ln 2$$

$$= 2^{3x} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \ln 2$$

$$= 2^{3m} \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{\ln 2} = 48 \ln 2^2 = 2 \cdot \cancel{48}^4 \ln 2$$

$$2^{3m} = 2 \cdot 4 = 2^3$$

$$3m = 3 \quad m = 1$$

4)

$$F = x^2 y^2 - \cos(2x+2y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y} = - \frac{2xy^2 + 2 \sin(2x+2y)}{2x^2 y^2 + 2 \sin(2x+2y)} \bigg|_{(\frac{\pi}{4}, 0)} = - \frac{0 + 2 \cdot \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4})}{2 \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4})}$$

$$8) \int \sqrt{4x^2 - 4x + 5}$$

NURAN GUZEL

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} =$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{\infty}{\infty} B. \frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

$$\ln y = 0 \quad y = e^0 = 1$$

(4) $f(x) = 1 + \frac{3}{2}x^{2/3}$ fonksiyonunun ekstremum değerini bulunuz.

NURAN GUZEL

Çözüm İlk olarak, verilen fonksiyonun türevini alırız. Türev

$$f'(x) = x^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

olup, hiç bir x değeri için sıfır değildir fakat $x = 0$ değeri türevi tanımsız yapmaktadır. Öyleyse $x = 0$, bir kritik sayıdır. Şimdi, I. Türev Testine göre

$$x < 0 \implies \sqrt[3]{x} < 0 \text{ olup, } f'(x) < 0,$$

$$x > 0 \implies \sqrt[3]{x} > 0 \text{ olup, } f'(x) > 0,$$

olup, $f(0) = 1$, bir **minimum** değerdir.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x \sin(e^{-x})]$ limitini hesaplayınız.

Çözüm Not olarak,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [x \sin(e^{-x})] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} \cdot \frac{x}{e^x} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} \\ &= 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

2)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1+2x, & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1) = ?$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2(1+h) - 1^2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + 2 + 2h - \cancel{1}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} (2 + \frac{2}{h})}{\cancel{h}} = \infty \quad (20)$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1-h)^2 - 1}{h} \quad (20)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{1} - 2h + h^2 - \cancel{1}}{h} = \frac{-2h}{h} = -2$$

$f'_+(1)$ merant shuadifanden tuzer yotue

$$2) \quad f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0+h+1 - (0+1)}{h} \quad f'(0) = ?$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad (20)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0-h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(0-h) - (0-h)^2 - (0+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - h^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(1 + h + \frac{1}{h})}{h}$$

$$= -\infty \quad (20)$$

$f'_-(0)$ mevcut olmadığından TÖREV
YOKTUR. (10)

Soru 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})]$ limitini hesaplayınız. (L'Hopital kuralı kullanılmayacak)

Soru 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x-x^2, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ ile veriliyor. Eğer mevcutsa $f'(0)$ değerini bulunuz.

$$1) L = \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x} \cdot (\sin(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}))]$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = 0 \quad (20)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{x} \sin(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \cdot \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \right]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \right) \cdot \sqrt{x} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) \quad (20)$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(1+x-x)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} \\ = \frac{1}{2}$$

$$L = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (10)$$

2) Sürekli olup olmadığına bakalım

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x-x^2 = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ da fonk sürekli} \\ \text{olmadığından } f'(0) \text{ türevi} \\ \text{yoktur.} \end{array} \right. \quad (50)$$

KOLAY GELSİN..

Soru 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x \cdot \sin(\sqrt{1+x^2} - x)]$ limitini hesaplayınız. (L'Hopital kuralı kullanılmayacak)

Soru 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1+2x, & x > 1 \end{cases}$ ile veriliyor. Eğer mevcutsa $f'(1)$ değerini bulunuz.

$$1) \quad L = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(\sqrt{1+x^2} - x)$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} \quad (20)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(\sqrt{1+x^2} - x)}{(\sqrt{1+x^2} - x)} \cdot x \cdot (\sqrt{1+x^2} - x) \right]$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x (\sqrt{1+x^2} - x) \right] \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{(1+x^2 - x^2)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{2} \quad (20)$$

$$L = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (10)$$

2) Sürekli olup olmadığının bakalım

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 1+2x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

$$f(1) = 1$$

... (50)

funk $x=1$ de
olmadığından

sürekli

$f'(1)$ türevi
yoktur.

Soru 4 $x^3 + y^3 + 3x^2 + 3y = 4$ kapalı formunda verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' + 6x + 3y' = 0$$

$$y(3y^2 + 3) = -(3x^2 + 6x) \Rightarrow y' = -\frac{x^2 + 2x}{y^2 + 1}$$

$$y' = 0 \quad (\text{Kritik Nokta})$$

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -2$$

$$x = 0 \text{ için } y^3 + 3y = 4 \Rightarrow y = 1, \quad \left(y^3 + 3y - 4 = (y - 1) \underbrace{(y^2 + y + 4)}_{\Delta < 0} = 0 \right)$$

$$x = -2 \text{ için } -8 + y^3 + 12 + 3y = 4$$

$$y^3 + 3y = 0 \Rightarrow y(y^2 + 3) = 0 \Rightarrow y = 0,$$

$$\text{Kritik Noktalar } (0, 1), (-2, 0)$$

$$y' \text{ den türev alınırsa, } y'' = -\frac{(2x + 2)(y^2 + 1) - (x^2 + 2x)2yy'}{(y^2 + 1)^2}$$

$$y''(0, 1) = -\frac{2 \cdot 2 - 0}{(1 + 1)^2} = -1 < 0 \quad \text{maksimum}$$

$$y''(-2, 0) = -\frac{-2 \cdot 1 - 0}{(0 + 1)^2} = 2 > 0 \quad \text{minimum}$$

4. $y = y(x)$ olmak üzere $x^y + y^x = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \ln \sqrt{y} - \arctan(x^3 y^2)$ ise $y' = ?$

$$e^{y \ln x} + e^{x \ln y} = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \ln y - \arctan(x^3 y^2)$$

$$e^{y \ln x} \left[y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} \right] + e^{x \ln y} \left[\ln y + x \cdot \frac{y'}{y} \right]$$

$$= -\sin\left(\frac{y}{x}\right) \left[\frac{y'x - y}{x^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{y'}{y} - \frac{1}{1 + (x^3 y^2)^2} [3x^2 y^2 + 2x^3 y y']$$

$$x^y \left[\frac{xy' \ln x + y}{x} \right] + y^x \left[\frac{y \ln y + xy'}{y} \right]$$

$$= -\sin\left(\frac{y}{x}\right) \frac{(y'x - y)}{x^2} + \frac{y'}{2y} - \frac{1}{1 + (x^3 y^2)^2} [3x^2 y^2 + 2x^3 y y']$$

$$y' \left[x^y \ln x + y^x \frac{x}{y} + \frac{1}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2y} + \frac{2x^3 y}{1 + (x^3 y^2)^2} \right]$$

$$= \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{3x^2 y^2}{1 + (x^3 y^2)^2} - x^y \frac{y}{x} - y^x \ln y$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{3x^2 y^2}{1 + (x^3 y^2)^2} - x^y \frac{y}{x} - y^x \ln y}{x^y \ln x + y^x \frac{x}{y} + \frac{1}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2y} + \frac{2x^3 y}{1 + (x^3 y^2)^2}}$$

(2-a) $xy = 8$ hiperbolü üzerindeki hangi noktalarda teğet, $y - 2x = 1$ doğrusuna diktir?

Çözüm Diklik şartını kullanabilmek için önce, verilen eğrinin teğetinin eğimini bulalım. $P(a, b)$, eğri üzerindeki istenilen noktalardan biri olsun. Eğer $xy - 8 = 0$ ifadesini, $y = f(x)$ olduğunu kabul ederek türetirsek

$$y + xy' = 0 \quad \text{dan} \quad y' = -\frac{y}{x} \quad (3)$$

buluruz. Şimdi diklik şartı,

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \quad \text{ile} \quad a = 2b \quad (3)$$

verir. Bu değeri hiperbol denkleminde yazarak da

$$2b^2 = 8 \quad \text{den} \quad b = \pm 2$$

buluruz. Neticede istenilen noktalar $P(4, 2)$ ve $Q(-4, -2)$ dir. $\triangleleft$ (2)

$$\begin{aligned} -\frac{8}{x_0^2} \cdot 2 &= -1 \\ x_0^2 &= 16 \\ x_0 &= \pm 4 \\ y_0 &= \pm 2 \end{aligned}$$

(2-b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm L'Hopital kuralını kullanmak için $u = [\cos(1/x)]^x$ dersek, $\ln u = x \ln[\cos(1/x)]$ olup, limite geçince

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln u = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln \left(\cos \frac{1}{x} \right) \right] \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\cos \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \quad (2)$$

$$\ln \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} u \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}} \stackrel{(4)}{=} 0$$

dan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x \stackrel{(1)}{=} e^0 = 1$$

elde edilir. $\triangleleft$

(9)

Soru 2. $f(x) = \sin\left(\arccos\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz, artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

(Burada $\arccos x$ fonksiyonu, $\cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, fonksiyonunun tersini göstermektedir.)

Cevap 2.

$\sin$ fonksiyonu reel ekseninde her yerde tanımlı olduğundan, f 'nin tanım kümesini bulmak için $\arccos\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulmak yeterlidir.

$\arccos\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)$ fonksiyonu $\left|\frac{x+1}{1-2x}\right| \leq 1$ için tanımlı olduğundan

$$\frac{x+1}{1-2x} \geq -1 \Rightarrow \frac{x+1}{1-2x} + 1 = \frac{2-x}{1-2x} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup [2, \infty)$$

ve

$$\frac{x+1}{1-2x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x+1}{1-2x} - 1 = \frac{3x}{1-2x} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup (\frac{1}{2}, \infty)$$

olmalıdır. Buna göre f 'nin tanım kümesi

$$D(f) = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

olarak bulunur.

Fonksiyonun artan/azalan olduğu aralıkları belirlemek için türev

alalım:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\arccos\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)\right) \cdot \frac{-\frac{3}{(1-2x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2}} = \frac{x+1}{1-2x} \cdot \frac{-3}{(1-2x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2}} = \\ &= \frac{3(x+1)}{(2x-1)^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{1-2x}\right)^2}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buna göre;

$$-\infty < x < -1 \quad \text{ve} \quad 2 < x < \infty \quad \text{için} \quad f'(x) > 0 \quad \text{ve}$$

$$-1 < x < 0 \quad \text{için} \quad f'(x) < 0$$

olduğu görülür. O halde, f fonksiyonu tanım kümesi üzerinde

azalan olduğundan $(-\infty, -1]$ ve $[2, \infty)$ aralıklarında artan ve

$[-1, 0]$ aralığında azalandır.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$ limitini hesaplayınız.

(L'Hospital kuralını kullanmayınız).

NURAN GÜZEL

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \rightarrow 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$1 - \cos \frac{1}{x} = 2 \sin^2 \frac{1}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) \stackrel{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{2x} \stackrel{0}{=}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{1}{2x} = t \quad \text{ise} \quad \frac{1}{x^2} = 4t^2$$

$$x \rightarrow \infty \text{ iken } t \rightarrow 0$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{4t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$$

$$= \frac{1}{2}$$

4) $x \cdot \sin(xy - y^2) = x^2 - 1$ ile verilen eğrinin $A(1,1)$ noktasındaki teğet ve normal doğrularının denklemini bulunuz.

$$\sin(xy - y^2) + x(y + y'x - 2yy') \cos(xy - y^2) = 2x$$

$$\sin(xy - y^2) + xy \cos(xy - y^2) + y'(x^2 - 2xy) \cos(xy - y^2) = 2x$$

$$y'(x^2 - 2xy) \cos(xy - y^2) = 2x - \sin(xy - y^2) - xy \cos(xy - y^2)$$

$$y' = \frac{2x - \sin(xy - y^2) - xy \cos(xy - y^2)}{(x^2 - 2xy) \cos(xy - y^2)}$$

$$y'|_A = \frac{2 - \sin 0 - 1 \cdot \cos 0}{(1 - 2) \cos 0} = -1$$

$$y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow y = 2 - x \quad \text{Teğet doğrusu}$$

$$y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x \quad \text{normal doğrusu}$$

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} + 1$$

3) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ fonksiyonuna $[0,2]$ aralığında

7(1-

Ortalama Değer Teoremi'nin uygulanabileceğini gösteriniz ve teoremi uygulayınız.

i-) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $4-x^2 \geq 0$, $|x| \leq 2$
 $f(x)$, $[0,2]$ aralığında sürekli

ii-) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, $4-x^2 > 0$, $x < 2$

$f(x)$, $(0,2)$ aralığında türevli

iii-) $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$ olacak
şekilde $c \in (0,2)$ mevcuttur.

$$-\frac{c}{\sqrt{4-c^2}} = -1 \Rightarrow c = \sqrt{4-c^2}$$

$$c^2 = 4 - c^2$$

$$2c^2 = 4$$

$$c = \pm \sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{2} \in (0,2)$$

Soru 3. $y \geq 0$ ve a bir pozitif sabit sayı olmak üzere $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ denklemi ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin herhangi bir (x_0, y_0) , ($x_0 \neq 0$ ve $y_0 \neq 0$), noktasındaki teğet doğrusunu bulunuz ve bu teğetin koordinat eksenleri arasında kalan parçasının uzunluğunun a 'ya eşit olduğunu gösteriniz.

Cevap 3.

$y = f(x)$ 'ın kısıtlı olarak verilen denkleminde x 'e göre türev alınırsa

$$\frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{2}{3} y^{-1/3} y' = 0 \Rightarrow y' = - \left(\frac{y}{x} \right)^{1/3}$$

bulunur. Buna göre eğrinin geçtiği (x_0, y_0) , $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, noktasındaki

teğet doğrusunun eğimi: $-\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{1/3}$ ve dolayısıyla

teğet doğrusunun denklemi: $y - y_0 = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{1/3} (x - x_0)$ dir.

Teğetin x -eksenini kestiği noktanın x -koordinatı ve y -eksenini kestiği noktanın y -koordinatı, sırasıyla,

$$x = (x_0^{2/3} + y_0^{2/3}) x_0^{1/3} = a^{2/3} \cdot x_0^{1/3}$$

$$y = (x_0^{2/3} + y_0^{2/3}) y_0^{1/3} = a^{2/3} \cdot y_0^{1/3}$$

olarak bulunur. Buna göre teğetin koordinat eksenleri arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^{4/3} (x_0^{2/3} + y_0^{2/3})} = \sqrt{a^{4/3} a^{2/3}} = a \text{ dir.}$$

b) $\sqrt[3]{7.8}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz. (15 p.)

• $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 3

• $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ 3

• $x_0 = 8$ alınırsa $f(x_0) = f(8) = 2$, $f'(x_0) = f'(8) = 1/12$ 3

• $L(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 2 + \frac{1}{12}(x - 8)$ 3

• $f(7.8) \approx 2 + \frac{1}{12}(-0.2) = 2 - \frac{1}{60} = \frac{119}{60}$ 3

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos(x + \frac{1}{x^3}) = ?$ (Yol gösterme: Sandviç teoreminden yararlanınız.) (10 p.)

NURAN GÜZEL

- $\forall \theta \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ olduğundan $-1 \leq \cos(x + \frac{1}{x^3}) \leq 1, x \neq 0.$ 3
- $-x^2 \leq x^2 \cos(x + \frac{1}{x^3}) \leq x^2, x \neq 0$ 3
- $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$ olduğundan Sandviç teoremi gereğince 2
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos(x + \frac{1}{x^3}) = 0.$ 2

b) $f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \right) = 2, g(x) = (x^2 - 3)^4 f(x)$ ise $g'(0) = ?$ (15 p.)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \right) = \frac{f(0) - 1}{0} = \frac{0}{0}$ 4
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = f'(0) = 2.$ 4
- $g'(x) = 4(x^2 - 3)^3 (2x) f(x) + (x^2 - 3)^4 f'(x)$ 4
- $g'(0) = 162.$ 3

$$\text{Soru 1. } \underbrace{\arcsin \frac{12}{13}}_{\alpha} - \underbrace{\operatorname{arccot} \frac{17}{7}}_{\beta} = ?$$

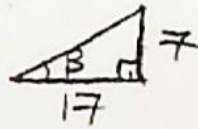
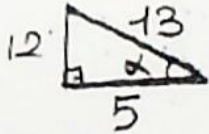
$$\arcsin \frac{12}{13} = \alpha \quad \text{ve} \quad \operatorname{arccot} \frac{17}{7} = \beta \quad \text{olsun.}$$

$$\alpha - \beta = ?$$

NURAN GÜZEL

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\cot \beta = \frac{17}{7}$$



$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{12}{5} - \frac{7}{17}}{1 + \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{17}}$$

$$= \frac{12 \cdot 17 - 5 \cdot 7}{5 \cdot 17 - 12 \cdot 7} = \frac{204 - 35}{85 - 84} = \frac{169}{169} = 1$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$ değerini bulunuz.

NURAN GÜZEL

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$ belirsizliği var.

$$\left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)}{x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

L'Hospital dan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

Soru 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arcsin x}{1 - x \cos x} = ? \quad \left[\frac{0}{0}\right]^3 \textcircled{3}$

NURAN GÜZEL

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \textcircled{7}}{1 - \cos x + x \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{-1} - (1-x^2)^{-1/2}}{1 - \cos x + x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(1+x^2)^{-2} + \frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-3/2} \textcircled{4}}{\sin x + \sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right]^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3} - (1-x^2)^{-3/2} - 3x^2(1-x^2)^{-5/2}}{2 \cos x + \cos x - x \sin x \textcircled{4}}$$

$$= \frac{-2-1}{3-0} = -1 \textcircled{2}$$

II. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1 - x^2}{1 - \cos x + x \sin x}$$

III. $x(1 - \cos x) = 2x \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arcsin x}{x^3}$$