

Türevlenebilir Fonksiyonların Terslerinin Türevleri

$f(x) = (1/2)x + 1$ 'in ve tersi $f^{-1}(x) = 2x - 2$ 'nin türevlerini hesaplarsak

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{d}{dx} (2x - 2) = 2$$

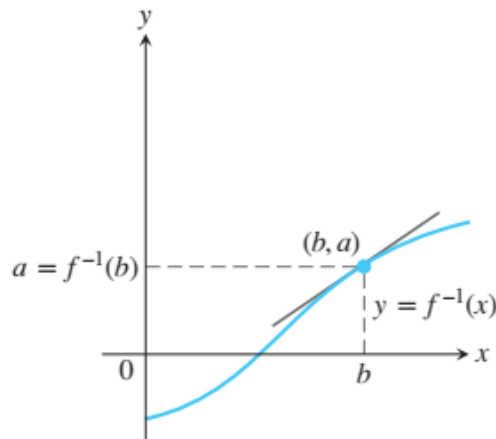
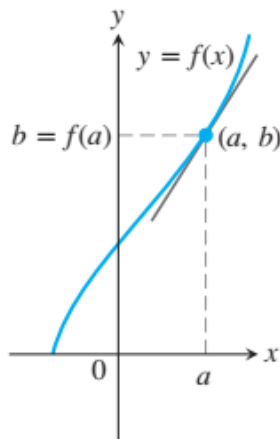
Türevler birbirlerinin çarpmaya göre tersidir.

f ve f^{-1} 'in eğimleri arasındaki çarpmaya göre terslik ilişkisi başka fonksiyonlar için de geçerlidir. Fakat, birbirlerine karşı gelen noktalardaki eğimleri karşılaştırmaya dikkat etmeliyiz. $y = f(x)$ 'in $(a, f(a))$ noktasındaki eğimi $f'(a)$ ise ve $f'(a) \neq 0$ ise, $y = f^{-1}(x)$ 'in buna karşılık gelen $(f(a), a)$ noktasındaki eğimi $1/f'(a)$ dır $b = f(a)$ yazarsak

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

ölür. $y = f(x)$ 'in $(a, f(a))$ noktasında yatay bir teğeti varsa f^{-1} ters fonksiyonunun $(f(a), a)$ noktasında dikey bir teğeti vardır ve bu sonsuz eğim f^{-1} 'in

$f(a)$ da türevlenebilir f^{-1} ters fonksiyonunu olmamasını gerektirir. Teorem 1, f^{-1} 'in hangi koşullar altında, aynı zamanda f 'nin değer kümesi de olan, tanım kümesi içinde türevlenebilir olduğunu vermektedir.



Eğimler birbirini çarpmaya göre tersidir: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ veya $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

TEOREM 1: Ters fonksiyonlar için türev kuralı

f 'nin tanım kümesi I ise ve I üzerinde $f'(x)$ var ve hiç sıfır olmuyorsa, f^{-1} , tanım kümesinin her noktasında türevlenebilir dir. f^{-1} 'in tanım kümesinin bir b noktasındaki $(f^{-1})'$ değeri, f' 'nün $a = f^{-1}(b)$ 'deki değerinin çarpmaya göre tersidir.

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

veya

$$\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=b} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=f^{-1}(b)}} \quad (1)$$

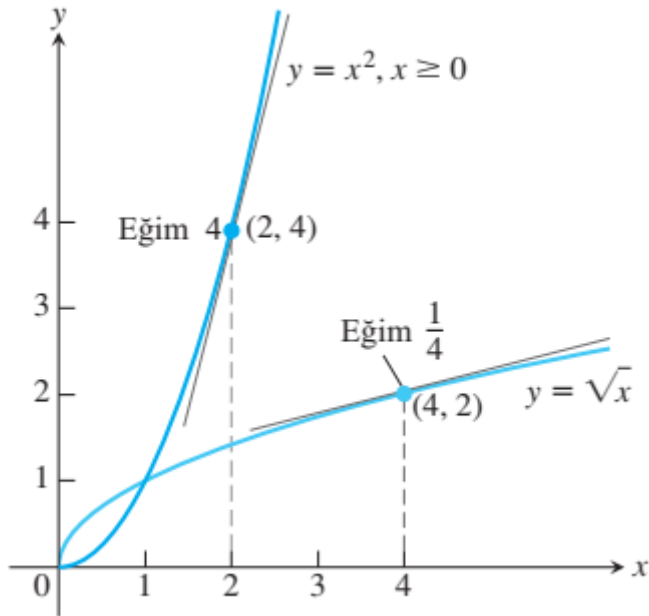
ÖRNEK

$f(x) = x^2$, $x \geq 0$ fonksiyonu ve tersi $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ 'in türevleri $f'(x) = 2x$ ve $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ dir.

Teorem 1, $f^{-1}(x)$ 'in türevinin

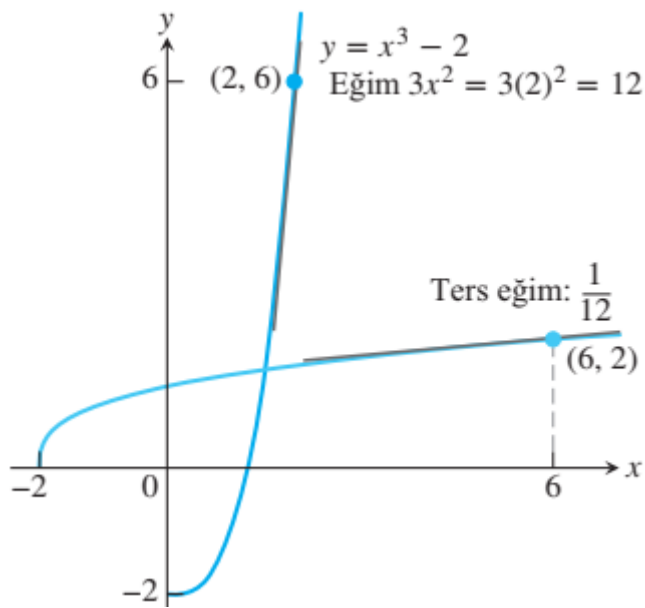
$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{x})}. \end{aligned}$$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2x} \Big|_{x=2} = \frac{1}{4}.$$



ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 2$ olsun. $f^{-1}(x)$ için bir formül bulmadan df^{-1}/dx 'in $x = 6 = f(2)$ 'deki değerini bulun.



$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=2} = 3x^2 \Big|_{x=2} = 12$$

$$\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=f(2)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=2}} = \frac{1}{12}$$

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, $x \geq 2$ olsun. df^{-1}/dx 'in $x = -1 = f(3)$ noktasındaki değerini bulun.

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 6x \Rightarrow \left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=f(3)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=3}} = \frac{1}{9}$$

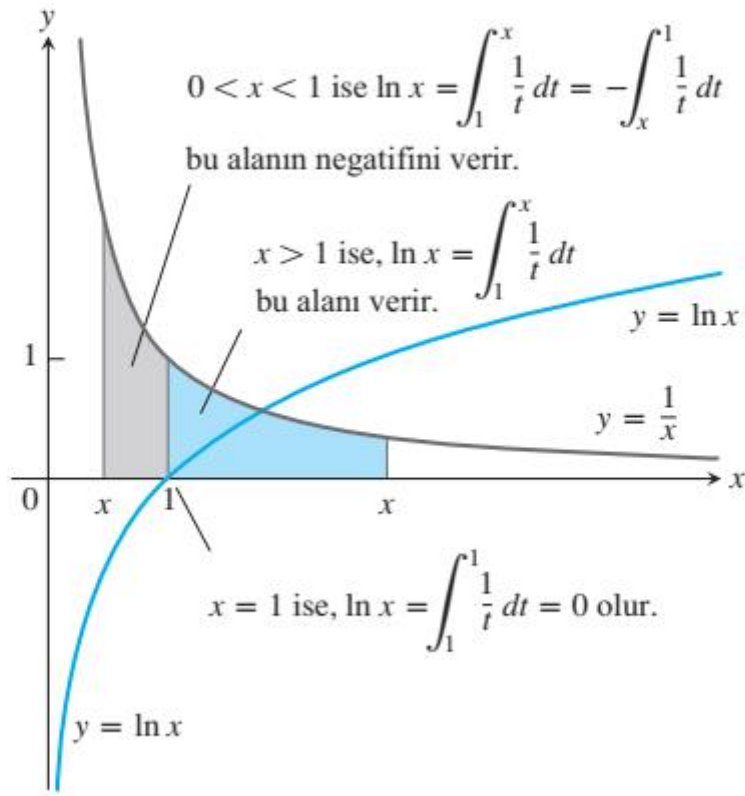
LOGARİTMA FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ

TANIM: Doğal Logaritma fonksiyonu

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

tanımlanır.

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0.$$



TANIM e Sayısı

e sayısı, doğal logaritma fonksiyonunun tanım kümesinde

$$\ln(e) = 1$$

eşitliğini sağlayan sayıdır.

$y = \ln x$ türevi

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}, \quad u > 0$$

$$(a) \frac{d}{dx} \ln 2x = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} (2x) = \frac{1}{2x} (2) = \frac{1}{x}$$

$$(b) u = x^2 + 3 \text{ ile (1) denklemi}$$

$$\frac{d}{dx} \ln (x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

her pozitif a sayısı için doğrudur:

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{ax} \cdot \frac{d}{dx} (ax) = \frac{1}{ax} (a) = \frac{1}{x}$$

TEOREM 2 Logaritmaların Özellikleri

Herhangi $a > 0$ ve $x > 0$ sayıları için, doğal logaritma şu kuralları sağlar:

1. *Çarpım Kuralı:* $\ln ax = \ln a + \ln x$
2. *Bölüm Kuralı:* $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
3. *Çarpıma Göre Ters Kuralı:* $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $a = 1$ ile Kural 2
4. *Kuvvet Kuralı:* $\ln x^r = r \ln x$ r rasyonel

$$(a) \ln 6 = \ln (2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 \quad \text{Çarpım}$$

$$(b) \ln 4 - \ln 5 = \ln \frac{4}{5} = \ln 0.8 \quad \text{Bölüm}$$

$$(c) \ln \frac{1}{8} = -\ln 8 \quad \text{Çarpıma göre ters}$$

$$= -\ln 2^3 = -3 \ln 2 \quad \text{Kuvvet}$$

$$(a) \ln 4 + \ln \sin x = \ln (4 \sin x)$$

$$(b) \ln \frac{x+1}{2x-3} = \ln (x+1) - \ln (2x-3)$$

$$(c) \ln \sec x = \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x \quad \text{Çarpıma göre ters}$$

$$(d) \ln \sqrt[3]{x+1} = \ln (x+1)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln (x+1) \quad \text{Kuvvet}$$

ÖRNEK

$$y = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}, \quad x > 1 \quad \text{ise } dy/dx \text{'i bulun.}$$

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1} \\ &= \ln ((x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}) - \ln (x - 1) \\ &= \ln (x^2 + 1) + \ln (x + 3)^{1/2} - \ln (x - 1) \\ &= \ln (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln (x + 3) - \ln (x - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

ÖRNEK

$$y = \theta(\sin(\ln \theta) + \cos(\ln \theta)) \quad \frac{dy}{d\theta} = ?$$

$$\frac{dy}{d\theta} = [\sin(\ln \theta) + \cos(\ln \theta)] + \theta [\cos(\ln \theta) \cdot \frac{1}{\theta} - \sin(\ln \theta) \cdot \frac{1}{\theta}]$$

$$= \sin(\ln \theta) + \cos(\ln \theta) + \cos(\ln \theta) - \sin(\ln \theta) = 2 \cos(\ln \theta)$$

ÖRNEK

$$y = \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{\sec \theta \tan \theta + \sec^2 \theta}{\sec \theta + \tan \theta} = \frac{\sec \theta (\tan \theta + \sec \theta)}{\tan \theta + \sec \theta} = \sec \theta$$

ÖRNEK

$$y = \ln \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = -\ln x - \frac{1}{2} \ln(x+1) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} \right) = -\frac{2(x+1)+x}{2x(x+1)} = -\frac{3x+2}{2x(x+1)}$$

ÖRNEK

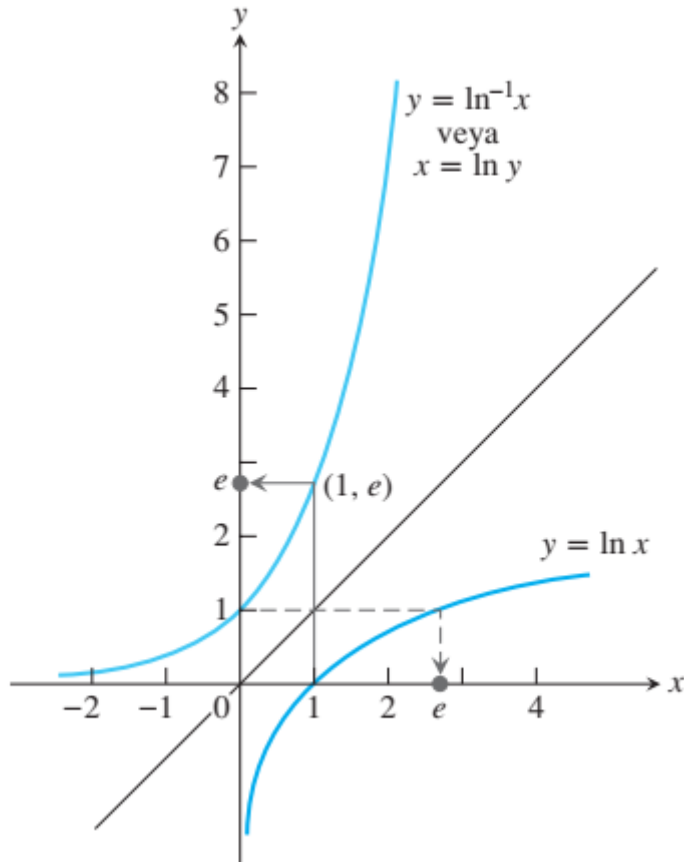
$$y = \ln(\ln(\ln x)) \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{d}{dx} (\ln(\ln x)) = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x(\ln x) \ln(\ln x)}$$

ÜSTEL(EKSPONENSİYEL) FONKSİYON

$$\exp x = e^x$$

$$y = \ln^{-1} x = \exp x$$

fonksiyonu $\ln x$ fonksiyonun tersidir. $y = \ln^{-1} x = \exp x$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln^{-1} x = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln^{-1} x = 0.$$

$$\ln(e) = 1$$

$$e = 2.718281828459045$$

$y = e^x$ Fonksiyonu

$$e^2 = e \cdot e, \quad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$\ln e^r = r \ln e = r \cdot 1 = r$$

$\ln x$ bire-bir olduğundan ve $(\ln^{-1} r) = r$ olduğundan, bu denklem bize

$$e^r = \ln^{-1} r = \exp r, \quad r \text{ rasyonel} \quad (1)$$

TANIM Doğal Eksponansiyel Fonksiyon

Her x reel sayısı için, $e^x = \ln^{-1} x = \exp x$, olarak tanımlanır.

e^x ve $\ln x$ İçin Ters Denklemler

$$e^{\ln x} = x \quad (\text{her } x > 0 \text{ için}) \quad (2)$$

$$\ln(e^x) = x \quad (\text{her } x \text{ için}) \quad (3)$$

ÖRNEK 1 Ters Denklemleri Kullanmak

(a) $\ln e^2 = 2$

(b) $\ln e^{-1} = -1$

(c) $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$

(d) $\ln e^{\sin x} = \sin x$

(e) $e^{\ln 2} = 2$

(f) $e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$

(g) $e^{3 \ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8$ Bir yol

(h) $e^{3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8$ Bir başka yol

ÖRNEK 2 Bir üssü çözmek

$e^{2k} = 10$ ise k 'yi bulun.

Çözüm İki tarafın da doğal logaritmasını alın:

$$e^{2k} = 10$$

$$\ln e^{2k} = \ln 10$$

$$2k = \ln 10 \quad (3) \text{ denklemi}$$

$$k = \frac{1}{2} \ln 10.$$

a^x Genel Eksponansiyel Fonksiyonu

Her pozitif a sayısı için, $a = e^{\ln a}$ olduğu için, a^x 'i $(e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$ olarak düşünebiliriz. Bundan dolayı aşağıdaki tanımı yaparız.

TANIM Genel Eksponansiyel Fonksiyon

Herhangi $a > 0$ ve x sayıları için, a tabanlı eksponansiyel fonksiyon

$$a^x = e^{x \ln a}$$

dır.

$a = e$ iken $a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x$ verir.

ÖRNEK 3 Üstel Fonksiyonları Hesaplamak

(a) $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \approx e^{1.20} \approx 3.32$

(b) $2^{\pi} = e^{\pi \ln 2} \approx e^{2.18} \approx 8.8$

TEOREM 3 e^x İçin Üs Kuralları

Her x, x_1 ve x_2 sayıları için e^x doğal eksponansiyel fonksiyonu aşağıdaki kurallara uyar.

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

3. $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$

4. $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$

ÖRNEK 4 Üs Kurallarını Uygulamak

(a) $e^{x+\ln 2} = e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x$ Kural 1

(b) $e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$ Kural 2

(c) $\frac{e^{2x}}{e} = e^{2x-1}$ Kural 3

(d) $(e^3)^x = e^{3x} = (e^x)^3$ Kural 4

e^x 'in Türevi

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{d}{dx} \ln^{-1} x \\
&= \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{f'(e^x)} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}\right)} \\
&= e^x.
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

u , x 'in türevlenebilir herhangi bir fonksiyonu ise

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}.$$

ÖRNEK 6 Zincir Kuralını Üslerle Uygulamak

$$(a) \quad \frac{d}{dx} e^{-x} = e^{-x} \frac{d}{dx} (-x) = e^{-x} (-1) = -e^{-x}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \frac{d}{dx} (\sin x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

TEOREM 4 Bir Limit Olarak e Sayısı

e sayısı

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}.$$

limiti olarak hesaplanabilir.

Kuvvet Kuralı Genel Hali

$x > 0$ olduğu sürece herhangi bir sayı olabilir:

$$\ln x^n = \ln (e^{n \ln x}) = n \ln x \quad \ln e^u = u, u \text{ keyfi}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} e^{n \ln x} \quad x^n, x > 0 \text{'in tanımı}$$

$$= e^{n \ln x} \cdot \frac{d}{dx} (n \ln x) \quad e^u \text{ için Zincir Kuralı}$$

$$= x^n \cdot \frac{n}{x} \quad \text{Yine tanım}$$

$$= nx^{n-1}$$

Kuvvet Kuralı (Genel Hal)

u, x 'in türevlenebilir pozitif bir fonksiyonu ve n herhangi bir reel sayı ise, bu durumda u^n 'de x 'in türevlenebilir bir fonksiyonudur:

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

ÖRNEK 9 Kuvvet kuralını İrrasyonel Kuvvetlerle Kullanmak

$$(a) \frac{d}{dx} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1} \quad (x > 0)$$

$$(b) \frac{d}{dx} (2 + \sin 3x)^\pi = \pi(2 + \sin 3x)^{\pi-1}(\cos 3x) \cdot 3 \\ = 3\pi(2 + \sin 3x)^{\pi-1}(\cos 3x).$$

ÖRNEK

$$y = \ln(3te^{-t})$$

Türevi?

$$y = \ln(3te^{-t}) = \ln 3 + \ln t + \ln e^{-t} = \ln 3 + \ln t - t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$$

ÖRNEK

$$y = \ln \frac{e^\theta}{1+e^\theta} = \ln e^\theta - \ln(1+e^\theta) = \theta - \ln(1+e^\theta) \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 1 - \left(\frac{1}{1+e^\theta}\right) \frac{d}{d\theta}(1+e^\theta) = 1 - \frac{e^\theta}{1+e^\theta} = \frac{1}{1+e^\theta}$$

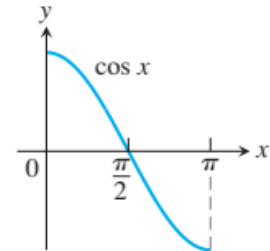
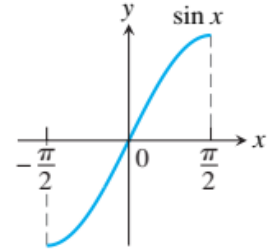
TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Ters Fonksiyonları Tanımlamak

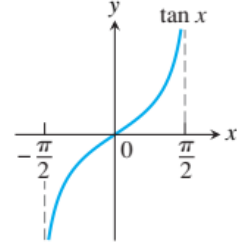
Altı temel trigonometrik fonksiyon bire-bir değildirler (değerleri periyodik olarak tekrarlanır), fakat tanım kümelerini bire-bir oldukları aralıklara kısıtlayabiliriz. Sinüs fonksiyonu $x = -\pi/2$ 'deki -1 değerinden $x = \pi/2$ 'deki 1 değerine kadar artar. Tanım kümesini $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığına kısıtlamakla $\sin^{-1} x$ gibi bir tersi var olacak şekilde bire-bir olmasını sağlayabiliriz (Şekil 7.16). Benzer tanım kümesi kısıtlamaları altı trigonometrik fonksiyonun her biri için uygulanabilir.

Trigonometrik fonksiyonları bire-bir yapan tanım kümesi kısıtlamaları

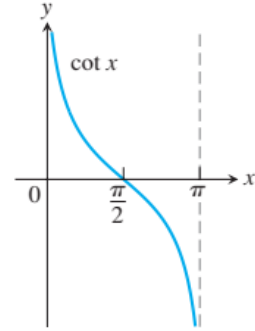
Fonksiyon	Tanım Aralığı	Değer Aralığı
$\sin x$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$



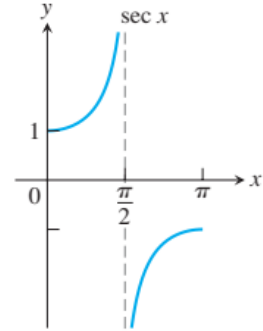
$$\tan x \quad (-\pi/2, \pi/2) \quad (-\infty, \infty)$$



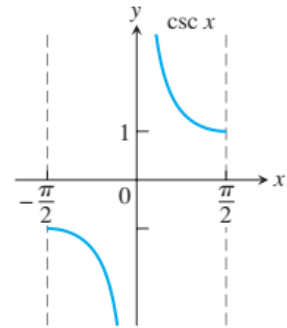
$$\cot x \quad (0, \pi) \quad (-\infty, \infty)$$



$$\sec x \quad [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] \quad (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$



$$\csc x \quad [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2] \quad (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$



Bu kısıtlanmış fonksiyonlar artık bire bir oldukları için, tersleri vardır ve bunları aşağıdaki şekilde gösteririz:

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \arcsin x$$

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \arccos x$$

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \arctan x$$

$$y = \cot^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \text{arccot } x$$

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \text{arcsec } x$$

$$y = \csc^{-1} x \quad \text{veya} \quad y = \text{arccsc } x$$

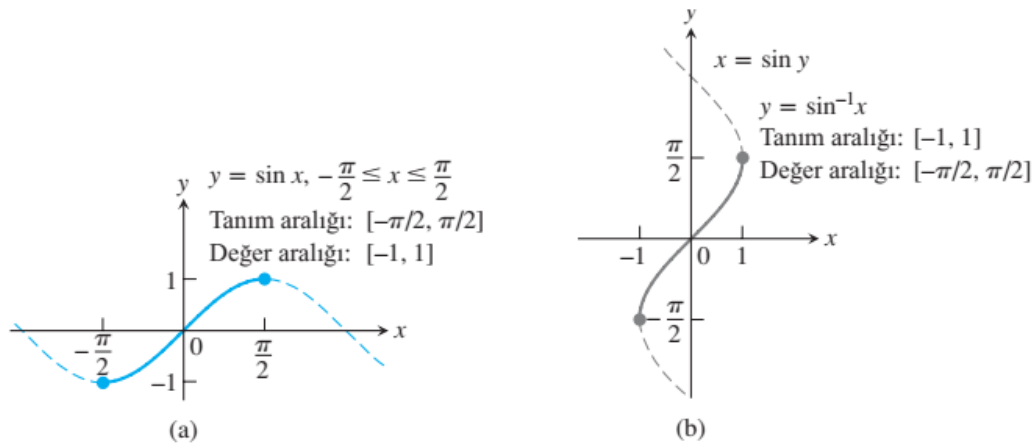
Arksinüs ve Arkkosinüs

x 'in arksinüsü, $[-\pi/2, \pi/2]$ 'de sinüsü x olan açıdır. Arkkosinüs ise $[0, \pi]$ 'de kosinüsü x olan açıdır.

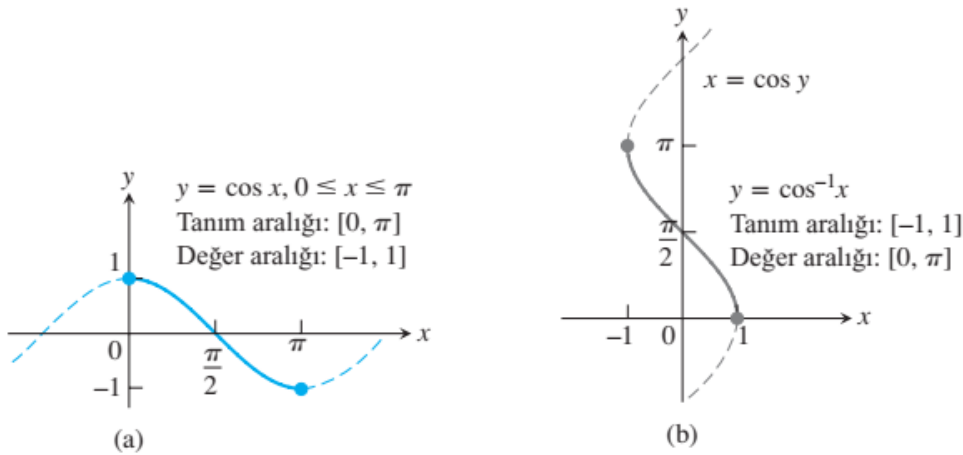
TANIM Arksinüs ve Arkkosinüs Fonksiyonları

$y = \sin^{-1} x$, $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında $\sin y = x$ olan sayıdır.

$y = \cos^{-1} x$, $[0, \pi]$ aralığında $\cos y = x$ olan sayıdır.



ŞEKİL 7.18 $y = \sin x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, ve (b) tersi $y = \sin^{-1} x$ 'in grafikleri. $\sin x$ 'in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğinin alınmasıyla elde edilen $\sin^{-1} x$ 'in grafiği, $x = \sin y$ eğrisinin bir parçasıdır.



ŞEKİL 7.19 $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$, ve (b) tersi $y = \cos^{-1} x$ 'in grafikleri. $\cos x$ 'in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğinin alınmasıyla elde edilen $\cos^{-1} x$ 'in grafiği, $x = \cos y$ eğrisinin bir parçasıdır.

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1} (-x) = \pi$$

$$\cos^{-1} (-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$$

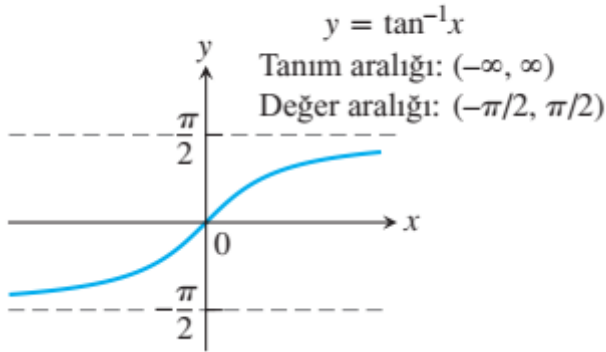
tanx, cot x, sec x ve csc x'in Ters Fonksiyonları

x 'in arkatanjantı tanjantı x olan bir açıdır. x 'in arkkotanjantı ise kotanjantı x olan bir açıdır.

TANIM Arkatanjant ve Arkkotanjant Fonksiyonları

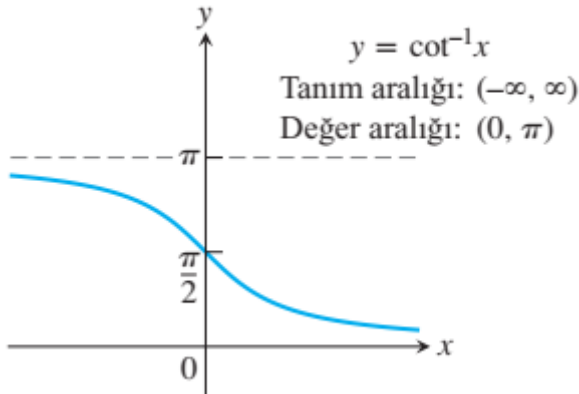
$y = \tan^{-1} x$, $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında $\tan y = x$ olan sayıdır.

$y = \cot^{-1} x$, $(0, \pi)$ aralığında $\cot y = x$ olan sayıdır.

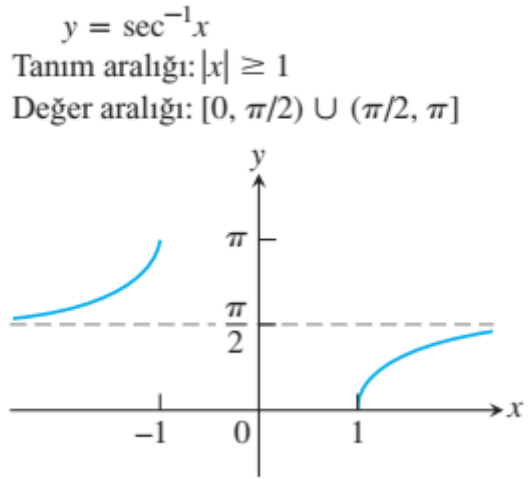


$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$$

tek fonkdur



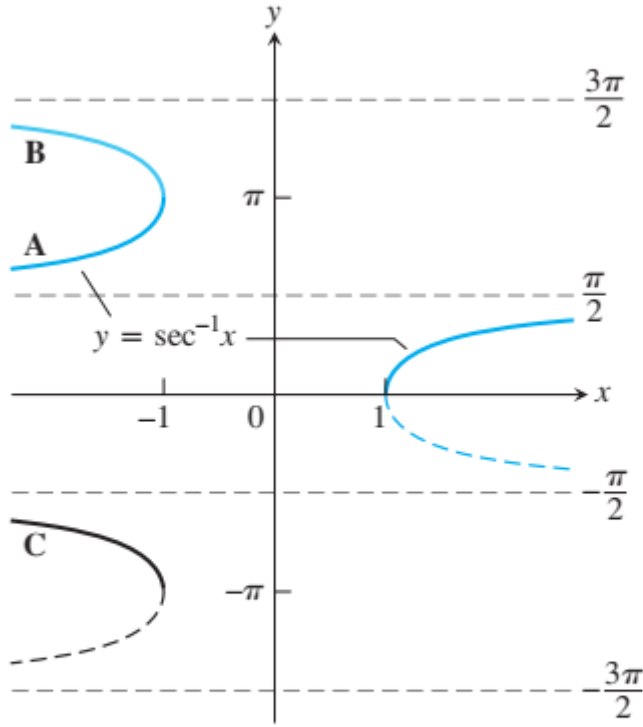
$$\sec^{-1} x = \cos^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)$$



Veya

Tanım aralığı: $|x| \geq 1$

Değer aralığı: $0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$



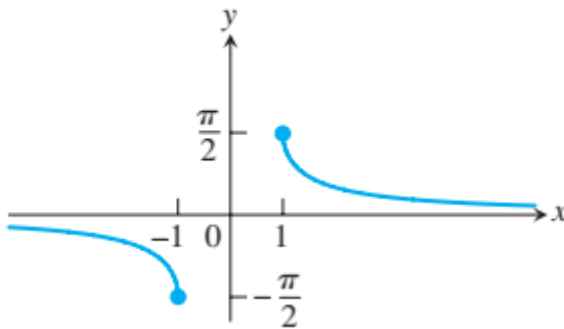
ŞEKİL 7.26 $y = \sec^{-1} x$ 'in sol kolu için çeşitli mantıklı seçimler vardır. A seçimi ile $\sec^{-1} x = \cos^{-1} (1/x)$, kullanışlı bir özdeşlik, birçok hesap makinesinde çalışır.

Şeklinde de alınır.

$$y = \csc^{-1} x$$

Tanım aralığı: $|x| \geq 1$

Değer aralığı: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$



ÖRNEK 4

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$$

ise $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\sec \alpha$, $\csc \alpha$ ve $\cot \alpha$ 'yı bulun.

Çözüm Yukarıdaki denklem $\sin \alpha = 2/3$ olduğunu söyler. α 'yı, hipotenüsü 3 olan bir dik üçgende, karşısındaki kenarı 2 olan bir açı olarak resmederiz (Şekil 7.27). Diğer kenarın uzunluğu

$$\sqrt{(3)^2 - (2)^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \quad \text{Pisagor Teoremi}$$

olarak bulunur. Bu bilgiyi de şekle ekler ve sonra tamamlanmış üçgenden istediğimiz bilgileri okuruz:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sec \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \csc \alpha = \frac{3}{2}, \quad \cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \blacksquare$$

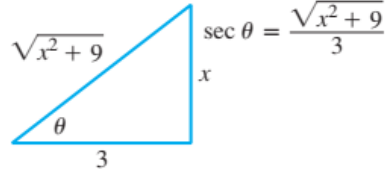
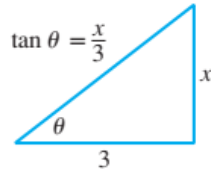
ÖRNEK 5 $\sec \left(\tan^{-1} \frac{x}{3} \right)$ 'ü bulun.

Çözüm $\theta = \tan^{-1} (x/3)$ alırız (sadece açığa bir isim vermek için) ve θ 'yı

$$\tan \theta = \text{karşı/komşu} = x/3$$

olan dik üçgende resimlendiririz. Üçgenin hipotenüsünün uzunluğu

$$\sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}.$$



olarak bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \sec \left(\tan^{-1} \frac{x}{3} \right) &= \sec \theta \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} \end{aligned} \quad \text{sec } \theta = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{komşu}}$$

elde ederiz. ■