

MAT1071

Hafta	Konular	Ön Hazırlık
1	Fonksiyonlar: Tanım Kümesi, Fonksiyonlar ve Grafikleri, Çift-tek Fonksiyonlar, Simetri, Fonksiyonlarda İşlemler (Toplamı, Farkı, Çarpımı, Bölümü ve Katları), Bileşke Fonksiyonlar, Parçalı Fonksiyonlar, Polinomlar ve Rasyonel Fonksiyonlar, Trigonometrik Fonksiyonlar.	Ders Kitabı 1 (Bölüm 1)
2	Limit ve Süreklilik: Bir Fonksiyonun Limiti ve Limit Kuralları, Sandviç (Sıkıştırma) Teoremi, Limitin Kesin Tanımı, Tek Taraflı Limitler, Sonsuzluğu İçeren Limitler, Sonsuz limitler	Ders Kitabı 1 (Bölüm 2)
3	Süreklilik: Bir noktada süreklilik, Sürekli Fonksiyonlar, Ara Değer Teoremi, Süreksizlik Çeşitleri. Türev: Teğet ve Normal Doğrular, Bir Noktada Türev, Bir Fonksiyon Olarak Türev, Tek Taraflı Türevler	Ders Kitabı 1 (Bölüm 3)
4	Bir Aralık Üzerinde Türev, Türev Kuralları, Yüksek Mertebeden Türevler, Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri, Zincir Kuralı, Kapalı Fonksiyonlarda Türev, Lineerleştirme ve Diferansiyeller, Artan-Azalan fonksiyonlar	Ders Kitabı 1 (Bölüm 3)
5	Transandant fonksiyonlar: Ters Fonksiyonlar ve Türevleri, Üstel ve Logaritmik Fonksiyonların Özellikleri ve Türevleri, Logaritmik Türev Alma, Ters Trigonometrik Fonksiyonlar ve Türevleri, Hiperbolik ve Ters Hiperbolik Fonksiyonlar ve Türevleri	Ders Kitabı 1 (Bölüm 7)
6	Belirsizlikler ve L'Hopital Kuralı, Fonksiyonların ekstremum değerleri, Kritik noktalar,	Ders Kitabı 1 (Bölüm 7)
7	Rolle Teoremi, Ortalama Değer Teoremi, Yerel Ekstremumlar için Birinci Türev Testi, Konkavlık, Konkavlık için İkinci Türev Testi, Büküm Noktaları, Yerel Ekstremum için İkinci Türev Testi	Ders Kitabı 1 (Bölüm 4)
8	Ara Sınav 1	
9	Grafiklerin Asimptotları, Eğri çizimi, Ters Türevler, Belirsiz İntegral, İntegrasyon Tablosu	Ders Kitabı 1 (Bölüm 6)
10	Integral: Alan ve Sonlu Toplamlarla Tahminde Bulunmak, Sigma Notasyonu ve Sonlu Toplamların Limitleri, Riemann Toplamları, Belirli İntegral, Belirli İntegralin Özellikleri, Negatif Olmayan Bir Fonksiyonun Grafiğinin Altındaki Alan, Sürekli Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri	Ders Kitabı 1 (Bölüm 5)
11	Belirli İntegraller için Ortalama Değer Teoremi, Kalkülüsün Temel Teoremi: Temel Teorem Kısım 1, Temel Teorem Kısım 2, İntegrasyon Teknikleri: Yerine Koyma Tekniği (Değişken Değiştirme), Kısmi İntegrasyon, Trigonometrik İntegraller, İndirgeme Formülleri	Ders Kitabı 1 (Bölüm 8)
12	Küçük Sınav 1, Trigonometrik Değişken Dönüşümleri, Tan ($\theta/2$) Değişken Değiştirme , Rasyonel Fonksiyonların Kısmi Kesirlerle İntegrasyonu	Ders Kitabı 1 (Bölüm 8)

Kaynak :Thomas Calculus cilt 1**Hazırlayan :Nuran GÜZEL**

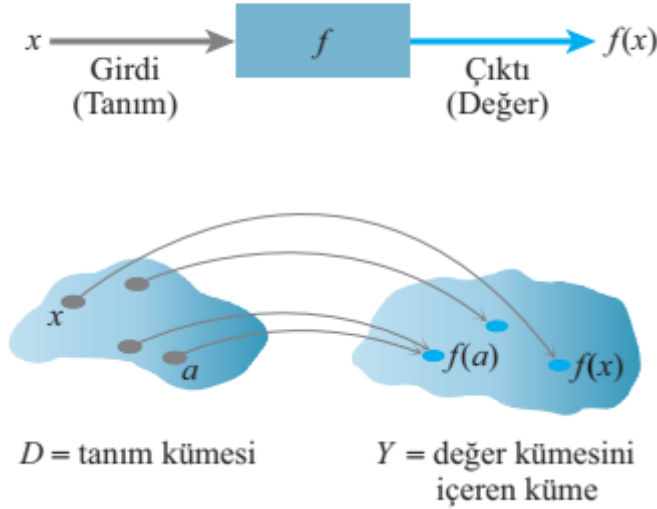
13	Belirli İntegralin Uygulamaları: Düzlem Bölgelerin Alanlarının Hesabı, İki Eğri Arasındaki Alan, Dönel Cisimlerin Hacimlerinin Hesabı (Disk Yöntemi, Pul Yöntemi, Silindirik Kabuk Yöntemi), Yay Uzunluğu, Dönel Yüzeylerin Alanları	Ders Kitabı 1 (Bölüm 6)
14	Genelleştirilmiş (Improper) İntegraller , I.Tip ve II. Tip Genelleştirilmiş (Improper) integraller	Ders Kitabı 1 (Bölüm 8)

1.3 FONKSİYONLAR; TANIM VE DEĞER KÜMELERİ

TANIM Fonksiyon: D ve Y bos olmayan iki küme olsun. Bir D kümesinden bir Y kümesine bir fonksiyon, D’deki her x elemanına Y’de tek bir $f(x)$ elemanı eşleyen bir kuraldır. $f:D \rightarrow Y$ şeklinde veya

$y = f(x)$ şeklinde gösterilir. Burada f bir sembol olup, bir fonksiyonu ifade etmektedir. Bağımsız değişken adı verilen x harfi f fonksiyonunun girdi değerini ve bağımlı değişken y ise f’nin x’teki değerine karşılık gelen, çıktı değerini göstermektedir.

Bütün olası girdi değerlerinin kümesi D’ye fonksiyonunun **tanım kümesi** denir. x, D üzerinde değişirken bütün $f(x)$ değerlerinin kümesine fonksiyonun **değer kümesi** denir. Değer kümesi y’deki her elemanı içermeyebilir



ÖRNEK 1 Tanım ve Değer Kümelerini Belirlemek

Verilen fonksiyonların tanım ve değer kümelerini sağlayın.

Fonksiyon	Tanım aralığı (x)	Değer aralığı (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Çözüm $y = x^2$ formülü her x reel sayısı için reel bir y -değeri verir, dolayısıyla tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ dur. $y = x^2$ nin değer kümesi $[0, \infty)$ dur çünkü herhangi bir reel sayının karesi negatif olmayan bir sayıdır ve negatif olmayan her y sayısı kendi karekökünün karesidir, $y \geq 0$ için $y = (\sqrt{y})^2$ dir.

$y = 1/x$ formülü $x = 0$ harici her x için reel bir y -değeri verir. Hiç bir sayıyı sıfır ile bölemez. $y = 1/x$ 'in değer kümesi, yani 0 hariç bütün reel sayıların çarpmaya göre terslerinin kümesi, $y = 1/(1/y)$ olduğundan, sıfırdan farklı bütün reel sayılar kümesidir.

$y = \sqrt{x}$ formülü ancak $x \geq 0$ ise reel bir y -değeri verir. Negatif olmayan her sayı bir başka sayının karekökü olduğu için (yani, kendi karesinin kareköküdür), $y = \sqrt{x}$ 'in değer kümesi $[0, \infty)$

$y = \sqrt{4 - x}$ 'te ise, $4 - x$ negatif olamaz. Yani, $4 - x \geq 0$ veya $x \leq 4$ olmalıdır. Formül, $x \leq 4$ için reel y -değerleri verir. $\sqrt{4 - x}$ 'in değer kümesi $[0, \infty)$, yani bütün negatif olmayan sayılar kümesidir.

$y = \sqrt{1 - x^2}$ formülü $[-1, 1]$ kapalı aralığındaki her x için reel bir y -değeri verir. Bu aralığın dışında, $1 - x^2$ negatiftir ve karekökü reel bir sayı değildir. $1 - x^2$ 'nin ve karekökünün değerleri 0 ile 1 arasında değişir. $\sqrt{1 - x^2}$ 'nin değer kümesi $[0, 1]$ dir. ■

FONKSİYONUN GRAFİKLERİ

fonksiyonun **grafığı bir fonksiyonu** göz önünde canlandırmanın bir başka yolu dur. Tanım kümesi D olan bir f fonksiyonun grafığı, Kartezyen düzlemde koordinatları f için girdi-çıkı çiftleri olan noktalardan oluşan kümedir. Yani, grafik

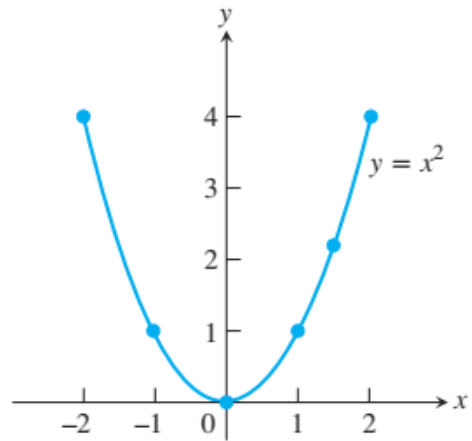
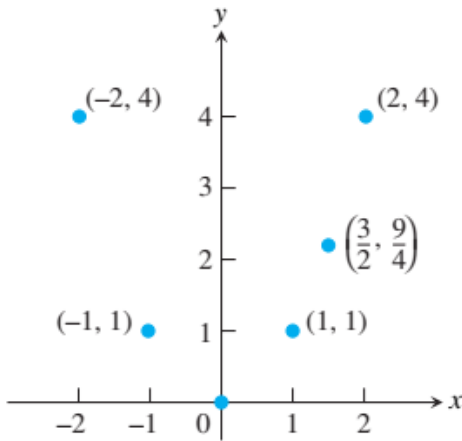
$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Kümesidir

ÖRNEK 2 Bir Grafik Çizmek

$[-2, 2]$ aralığında $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizin

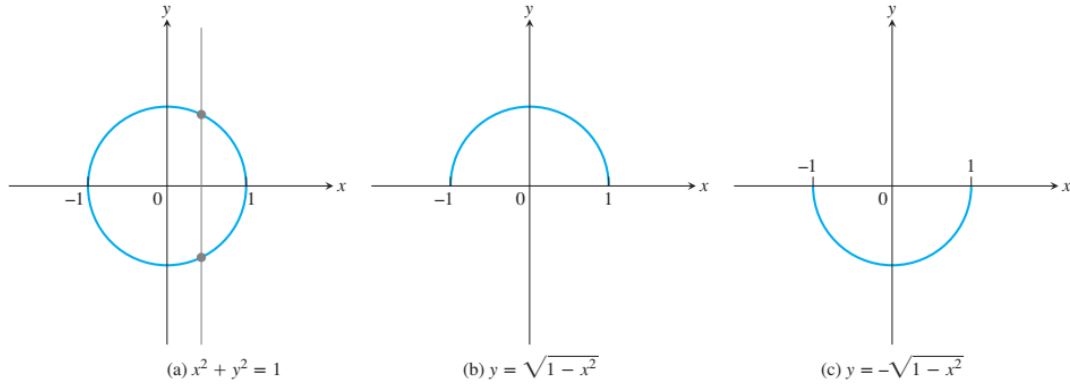
x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4



Dikey Doğru Testi

Çizdiğiniz her eğri; bir fonksiyonun grafiği değildir. Bir f fonksiyonu; tanım aralığındaki her x için, tek bir $f(x)$ değeri alacağından hiçbir dik doğru bir fonksiyonun grafiğini bir kereden fazla kesemez. Yani bir çember bir fonksiyonun grafiği olamaz, çünkü bazı dik doğrular çemberi iki kere keser (Şekil). $y=a$ bir f fonksiyonunun tanım kümesinde ise, $x = a$ dikey doğrusu f 'nin grafiğini tek bir $(a, f(a))$ noktasında kesecektir.

(a) Çember bir fonksiyonun grafiği değildir; dik doğru testini sağlamaz.



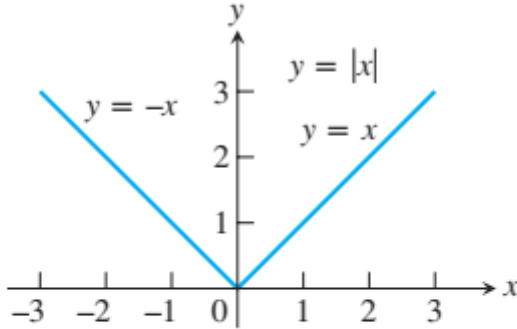
ŞEKİL 1.28 (a) Çember bir fonksiyonunun grafiği değildir; dik doğru testini sağlamaz. (b) üst yarıçember bir $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonunun grafiğidir. (c) alt yarıçember bir $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonunun grafiğidir.

Parçalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonlar

Bazen bir fonksiyon tanım aralığının farklı bölgeleri için değişik formüllerle verilebilir. Bunlardan biri grafiği Şekil 1.29'da verilen **mutlak değer fonksiyonu** dur:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Aşağıda bu tip fonksiyonlara birkaç örnek verilmektedir.

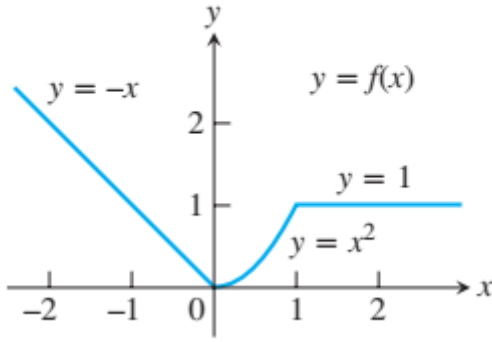


ŞEKİL 1.29 Mutlak değer fonksiyonunun tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ ve değer kümesi $[0, \infty)$.

ÖRNEK 5 Parçalı Olarak Tanımlı Fonksiyonların Grafiklerini Çizmek

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

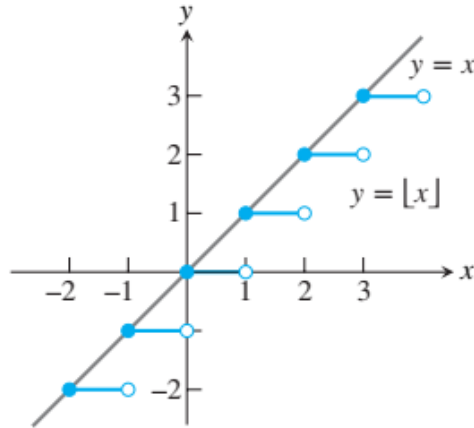
fonksiyonu bütün reel doğru üzerinde tanımlıdır, ancak değerleri x 'in konumuna bağlı olan farklı formüllerle bulunur. f 'nin değerleri: $x < 0$ iken $y = -x$ ile, $0 \leq x \leq 1$ iken $y = x^2$ ile ve $x > 1$ iken $y = 1$ ile verilir. Halbuki fonksiyon, tanım kümesi bütün reel sayılar kümesi olan *sadece bir fonksiyondur*. (Şekil 1.30). ■



ÖRNEK 6 En Büyük Tamsayı Fonksiyonu

Herhangi bir x sayısındaki değeri x 'ten küçük veya x 'e eşit en büyük tamsayı olan fonksiyona en **büyük tamsayı fonksiyonu** veya **tamsayı taban fonksiyonu** denir. $[x]$ veya bazı kitaplarda $\lfloor x \rfloor$ veya $\llbracket x \rrbracket$ ile gösterilir. Şekil 1.31'de grafiği görülmektedir.

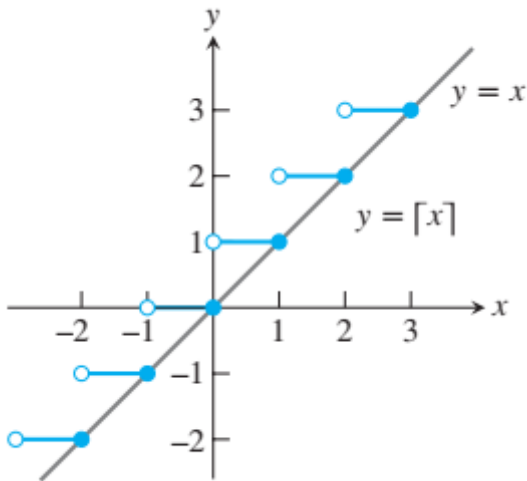
$$\begin{array}{llll} \lfloor 2.4 \rfloor = 2, & \lfloor 1.9 \rfloor = 1, & \lfloor 0 \rfloor = 0, & \lfloor -1.2 \rfloor = -2, \\ \lfloor 2 \rfloor = 2, & \lfloor 0.2 \rfloor = 0, & \lfloor -0.3 \rfloor = -1 & \lfloor -2 \rfloor = -2. \end{array}$$
 ■



ŞEKİL 1.31 En büyük tamsayı fonksiyonu $y = \lfloor x \rfloor$ 'in grafiği $y = x$ doğrusunda veya doğrunun altında bulunur ve böylece x için bir tamsayı tabanı oluşturur (Örnek 6).

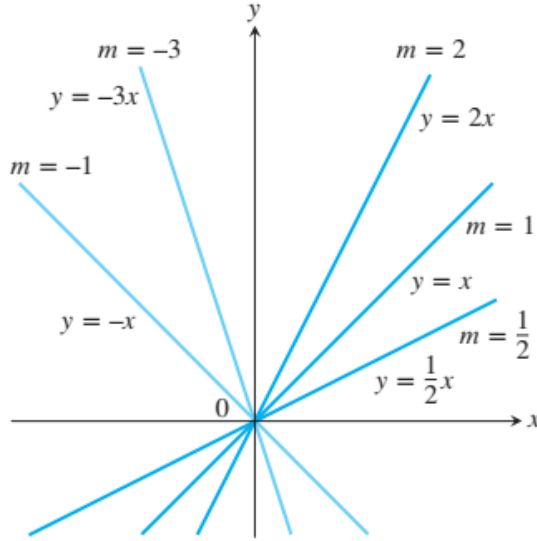
ÖRNEK 7 En Küçük Tamsayı Fonksiyonu

Herhangi bir x sayısındaki değeri x 'ten büyük veya x 'e eşit en küçük tamsayı olan fonksiyona **en küçük tamsayı fonksiyonu** veya **tamsayı tavan fonksiyonu** denir. $\lceil x \rceil$ ile gösterilir. Şekil 1.32'de grafiği görülmektedir. Bu fonksiyon, x 'in pozitif değerleri için örneğin, bir saat için \$1 alan bir park yerinde x saat kalmanın ederini gösteriyor olabilir. ■

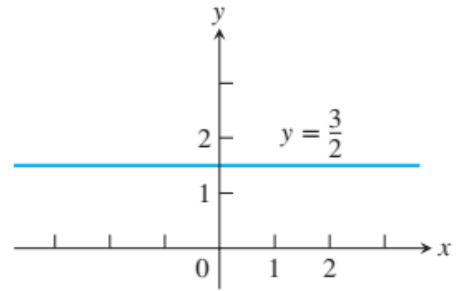


ŞEKİL 1.32 En küçük tamsayı fonksiyonu $y = \lceil x \rceil$ 'in grafiği $y = x$ doğrusunda veya doğrunun üstünde bulunur ve böylece x için bir tamsayı tavanı oluşturur. (Örnek 7).

Lineer Fonksiyonlar m ve b sabitler olmak üzere $f(x) = mx + b$ şeklindeki bir fonksiyona lineer fonksiyon denir. Şekil 1.34 te $b = 0$ için $f(x) = mx$ doğrularından bazıları görülmektedir, yani bu doğrular orijinden geçerler. $m = 0$ eğimi için sonuç sabit fonskiyondur (Şekil 1.35).



ŞEKİL 1.34 $y = mx$ doğrularının eğimleri m dir ve hepsi orijinden geçerler.



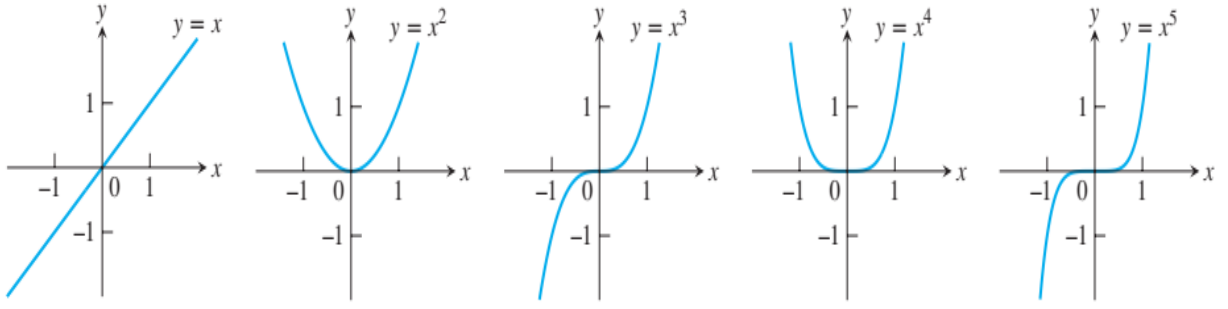
ŞEKİL 1.35 Bir sabit fonksiyonun eğimi $m = 0$ dır.

Kuvvet Fonksiyonları Bir a sabiti için $f(x) = x^a$ şeklindeki bir fonksiyona **kuvvet fonksiyonu** denir. Dikkate alınması gereken birkaç önemli durum vardır.

(a) $a = n$, bir pozitif tam sayı.

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ için $f(x) = x^n$ 'in grafikleri Şekil 1.36 da gösterilmektedir. Bu fonksiyonlar x 'in bütün reel değerleri için tanımlıdır. n kuvveti büyüdükçe eğrilerin $(-1, 1)$ aralığında x -eksenine doğru yassılaştığına, ayrıca $|x| > 1$ için daha dik yükseldiğine dikkat edin.

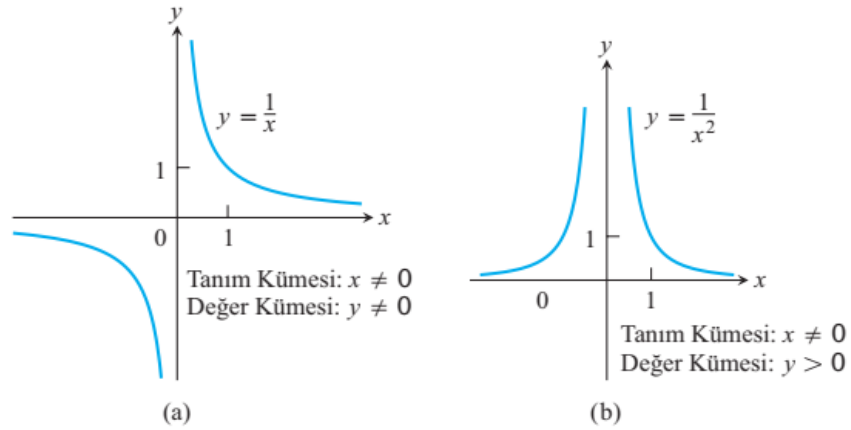
Her eğri $(1, 1)$ noktasından ve orijinden geçer.



ŞEKİL 1.36 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için $f(x) = x^n$ 'in grafikleri $-\infty < x < \infty$ için tanımlıdır.

(b) $a = -1$ veya $a = -2$.

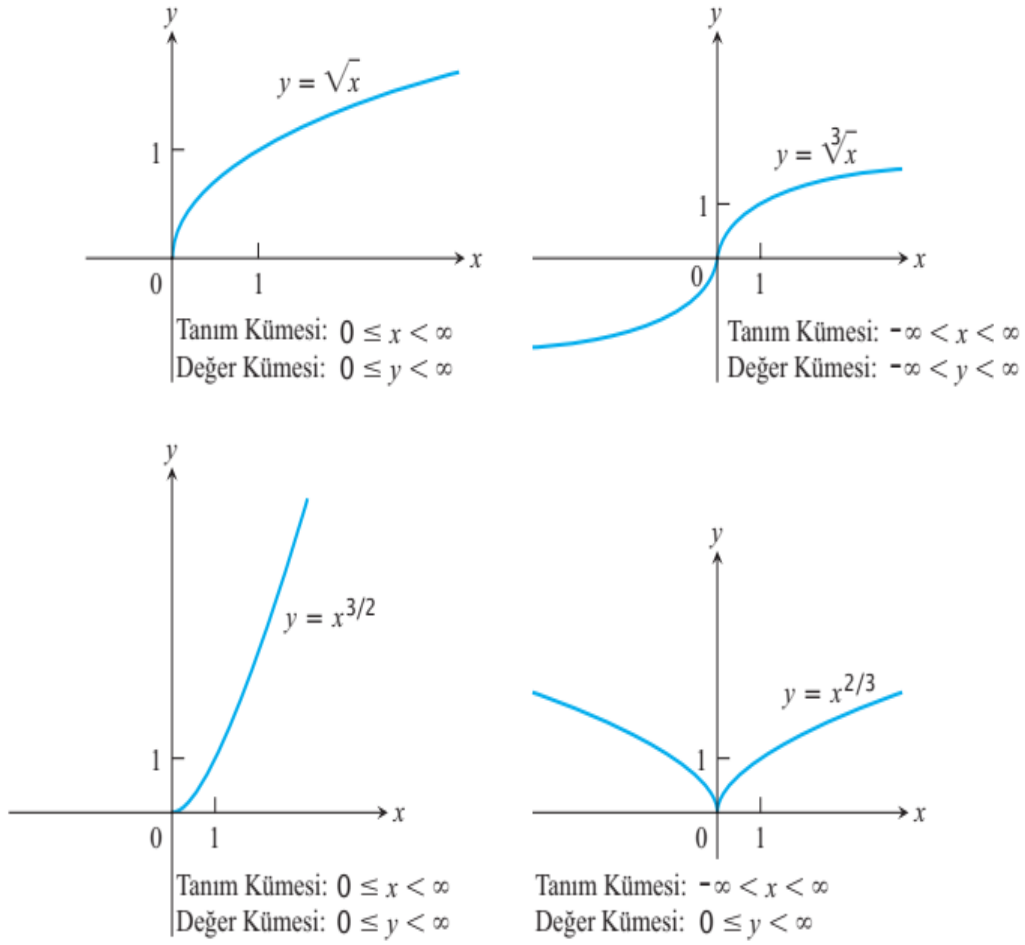
$f(x) = x^{-1} = 1/x$ ve $g(x) = x^{-2} = 1/x^2$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 1.37 de gösterilmiştir. Her iki fonksiyonda her $x \neq 0$ için tanımlıdır (asla sıfır ile bölemezsiniz). $y = 1/x$ 'in grafiği, orijinden uzaklaştıkça eksenlere yaklaşan $xy = 1$ hiperbolüdür. $y = 1/x^2$ 'nin grafiği de koordinat eksenlerine yaklaşır.



ŞEKİL 1.37 (a) $a = -1$ ve (b) $a = -2$ için $f(x) = x^a$ fonksiyonlarının grafikleri.

(c) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ ve $\frac{2}{3}$

$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonları sırasıyla **karekök** ve **küpkök** fonksiyonlarıdır. Karekök fonksiyonunun tanım kümesi $[0, \infty)$ dur, fakat küpkök fonksiyonu bütün reel x 'ler için tanımlıdır. Grafikleri, Şekil 1.38 de $y = x^{3/2}$ ve $y = x^{2/3}$ 'ün grafikleri ile birlikte verilmiştir ($x^{3/2} = (x^{1/2})^3$ ve $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$ olduğunu hatırlayın).

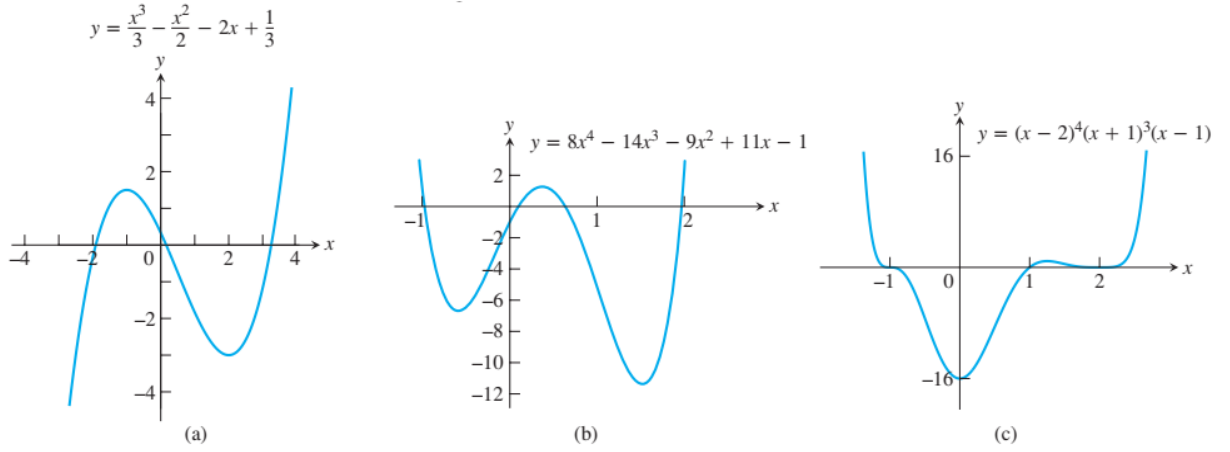


ŞEKİL 1.38 $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ ve $\frac{2}{3}$ için $f(x) = x^a$ fonksiyonlarının grafikleri.

Polinomlar n , negatif olmayan bir tam sayı ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sayıları (polinomun **katsayıları** denir) reel sabitler olmak üzere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ile tanımlı p fonksiyonuna **polinom** denir. Bütün polinomların tanım kümeleri $(-\infty, \infty)$ dur. İlk katsayı $a_n \neq 0$ ve $n > 0$ ise n 'ye polinomun **derecesi** denir. $m \neq 0$ ile lineer fonksiyonlar 1. dereceden polinomlardır. Genellikle $p(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde yazılan 2. derece polinomlara **kuadratik fonksiyonlar** denir. Benzer şekilde 3. dereceden $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomları **kübik fonksiyonlar** dır. Şekil 1.39 da üç polinomun grafikleri görülmektedir. Polinomların grafiklerinin nasıl çizildiğini Bölüm 4'te öğreneceksiniz.



ŞEKİL 1.39 Üç Polinom fonksiyon grafiği.

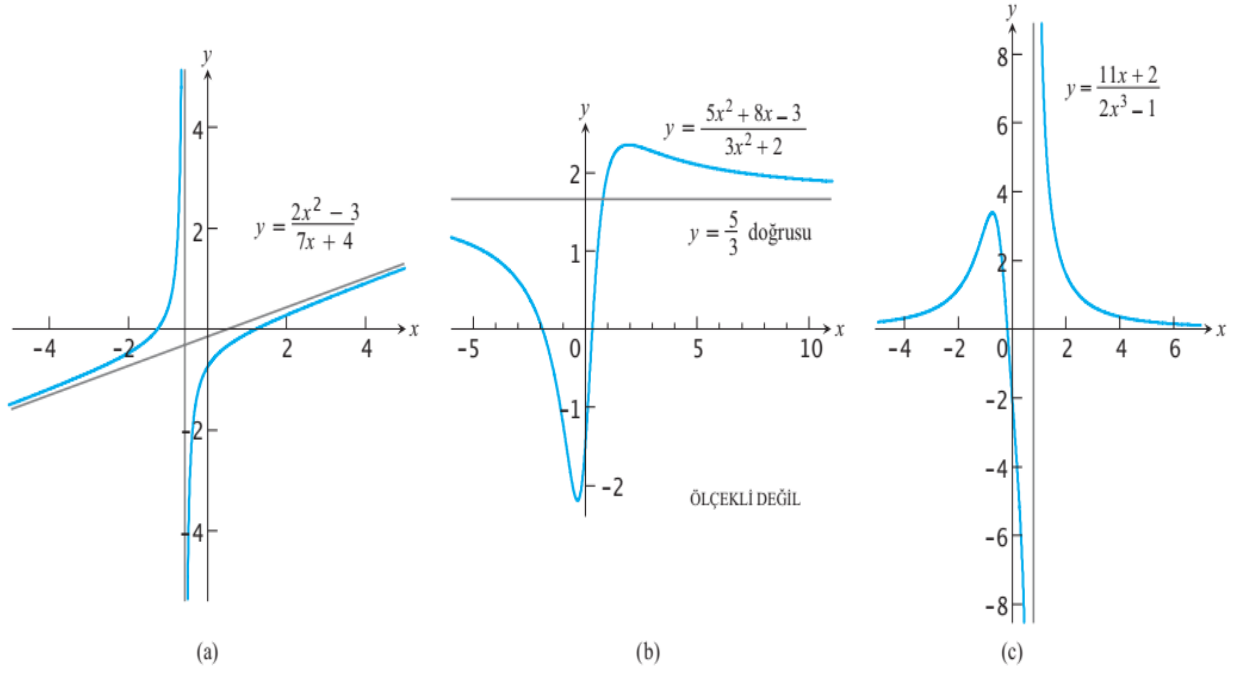
Rasyonel Fonksiyonlar Bir **rasyonel fonksiyon** iki polinomun bölümü veya oranıdır:

$$p \text{ ve } q \text{ polinomlar olmak üzere } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Bir rasyonel fonksiyonun tanım kümesi, $q(x) \neq 0$ koşulunu sağlayan bütün x reel sayılarının kümesidir. Örneğin,

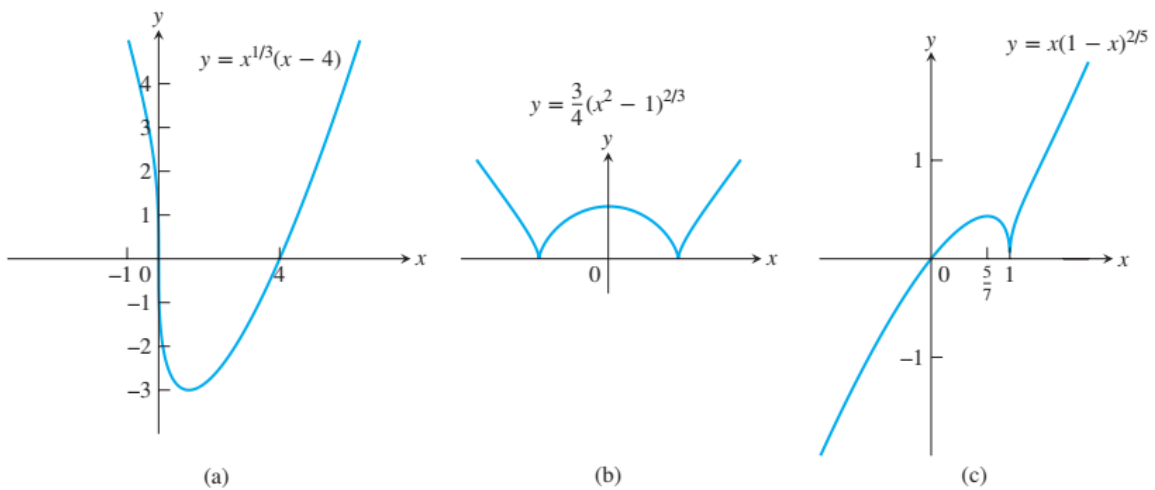
$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

fonksiyonu, tanım kümesi $\{x \mid x \neq -4/7\}$ olan bir rasyonel fonksiyondur. Grafiği, Şekil 1.40a da diğer iki rasyonel fonksiyon grafikleri Şekil 1.40b ve Şekil 1.40c ile birlikte gösterilmiştir.



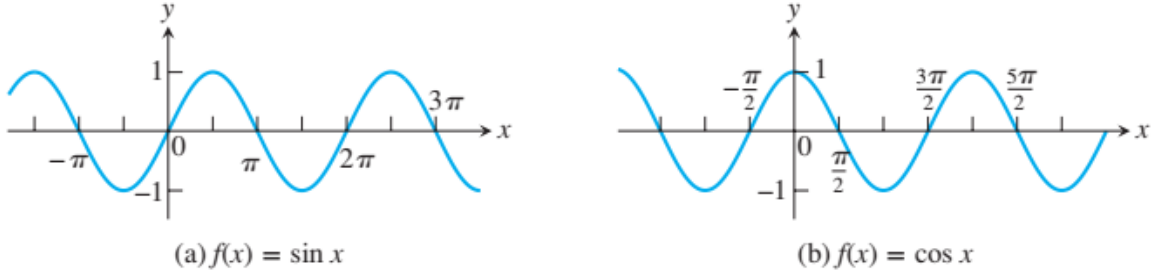
ŞEKİL 1.40 Üç rasyonel fonksiyon grafiği.

Cebirsel Fonksiyonlar Bir **cebirsel fonksiyon**, polinomlardan, cebirsel işlemler kullanılarak (toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kök alma), polinomlardan elde edilen bir fonksiyondur. Rasyonel fonksiyonlar cebirsel fonksiyonların bir özel halidir. Şekil 1.41 de üç cebirsel fonksiyonun grafikleri görülmektedir.



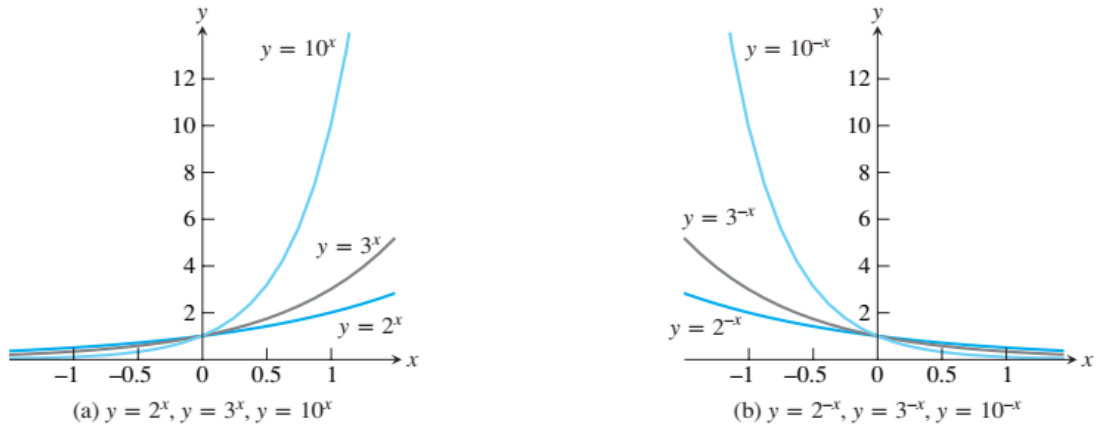
ŞEKİL 1.41 Üç cebirsel fonksiyon grafiği.

Trigonometrik Fonksiyonlar Trigonometrik fonksiyonları Bölüm 1.6 da inceleyeceğiz. sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının grafikleri Şekil 1.42 de gösterilmiştir.



ŞEKİL 1.42 Sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının grafikleri.

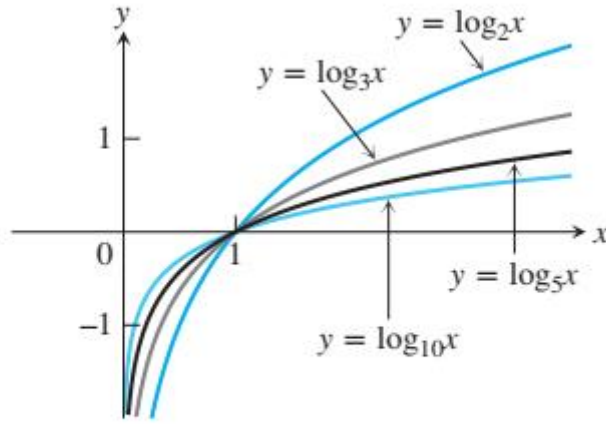
Üstel Fonksiyonlar Taban $a > 0$ pozitif bir sabit ve $a \neq 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ şeklindeki fonksiyonlara **üstel fonksiyonlar** denir. Bütün üstel fonksiyonların tanım kümeleri $(-\infty, \infty)$ ve değer kümeleri $(0, \infty)$ dur. Dolayısıyla, bir üstel fonksiyon hiçbir zaman 0 değerini almaz. Bazı üstel fonksiyon grafikleri Şekil 1.43 te gösterilmiştir. Üstel fonksiyonların analizi Bölüm 7 de yapılmaktadır.



ŞEKİL 1.43 Üstel fonksiyonlarının grafikleri.

Logaritmik Fonksiyonlar Bunlar, $a \neq 1$ pozitif bir sabit olmak üzere $f(x) = \log_a x$ şeklindeki fonksiyonlardır. Üstel fonksiyonların *ters fonksiyonları* dırlar ve bu fonksiyonlar Bölüm 7

de incelenmektedir. Şekil 1.44 te değişik tabanlı dört logaritmik fonksiyon grafiği görülmektedir. Her birinde tanım kümesi $(0, \infty)$ ve değer kümesi $(-\infty, \infty)$ dur.



ŞEKİL 1.44 Dört logaritmik fonksiyon grafiği.

Transandant Fonksiyonlar Bunlar cebirsel olmayan fonksiyonlardır. Trigonometrik, ters trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonlar ve (Bölüm 7 de incelenen hiperbolik fonksiyonlar gibi) birçok başka fonksiyon içerirler. Transandant fonksiyona bir örnek bir

- (a) $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5$ 5. dereceden bir polinomdur.
- (b) $g(x) = 7^x$ tabanı 7 olan bir üstel fonksiyondur. x değişkeninin kuvvet olduğuna dikkat edin.
- (c) $h(z) = z^7$ bir kuvvet fonksiyonudur. (Taban z değişkenidir)
- (d) $y(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ bir trigonometrik fonksiyondur. ■

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Soldan sağa doğru hareket edildiğinde bir fonksiyonun grafiği tırmanıyorsa veya yükseliyorsa fonksiyon *artan* dır deriz. Soldan sağa doğru hareket edildiğinde grafik aşağıya iniyorsa veya alçalıyorsa fonksiyon *azalan* dır deriz. Artan fonksiyonların ve azalan fonksiyonların formel tanımlarını bölüm 4.3 te veriyoruz. O bölümde, bir fonksiyonun artan olduğu aralıkların ve azalan olduğu aralıkların nasıl bulunduğunu öğreneceksiniz. Aşağıda Şekil 1.36, 1.37 ve 1.38. den örnekler verilmiştir.

Fonksiyon	Arttığı yer	Azaldığı yer
$y = x^2$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	Hiçbiryer
$y = 1/x$	Hiçbiryer	$-\infty < x < 0$ ve $0 < x < \infty$
$y = 1/x^2$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \leq x < \infty$	Hiçbiryer
$y = x^{2/3}$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$

TANIMLAR Çift Fonksiyonlar, Tek Fonksiyonlar

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesindeki her x için

$$f(-x) = f(x) \text{ ise çift fonksiyon}$$

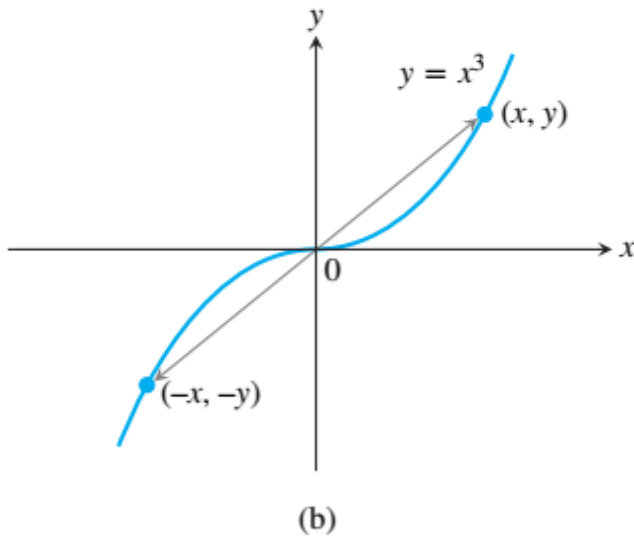
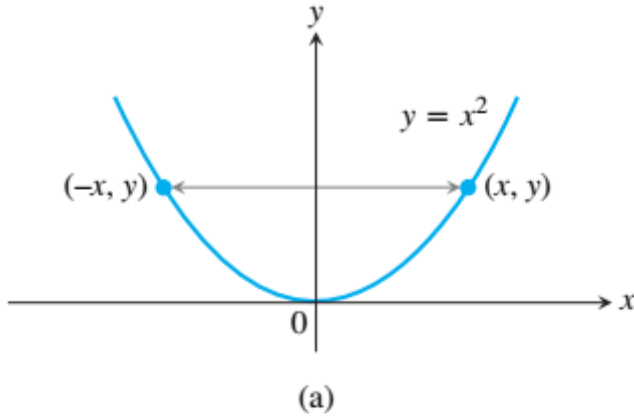
$$f(-x) = -f(x) \text{ ise tek fonksiyon}$$

dur.

Çift ve tek isimleri x 'in kuvvetlerinden gelmektedir. $y = x^2$ veya $y = x^4$ te olduğu gibi $y = x$ 'in bir çift kuvveti ise bir çift fonksiyondur (çünkü $(-x)^2 = x^2$ ve $(-x)^4 = x^4$ tür). $y = x$ veya $y = x^3$ te olduğu gibi $y = x$ 'in bir tek kuvveti ise bir tek fonksiyondur (çünkü $(-x)^1 = -x$ ve $(-x)^3 = -x^3$ tür).

Bir çift fonksiyonun grafiği **y-eksenine göre simetriktir**. $f(-x) = f(x)$ olduğundan ancak ve yalnız $(-x, y)$ noktası grafik üzerinde ise (x, y) noktası da grafik üzerindedir (Şekil 1.46a). y -ekseninden bir yansıma grafiği değiştirmeden bırakır.

Bir tek fonksiyonun grafiği **orijine göre simetriktir**. $f(-x) = -f(x)$ olduğundan ancak ve yalnız $(-x, -y)$ noktası grafik üzerinde ise (x, y) noktası da grafik üzerindedir (Şekil 1.46b). Eşdeğer olarak, orijin etrafında 180° lik bir dönme grafiği değiştirmeden bırakırsa grafik orijine göre simetriktir. Şuna dikkat edin, tanımlar x ve $-x$ 'in herikisinin de f 'nin tanım kümesinde olmasını gerektirir.



ŞEKİL 1.46 (a) da $y = x^2$ 'nin (bir çift fonksiyon) grafiği y -eksenine göre simetriktir. (b) de $y = x^3$ 'ün (bir tek fonksiyon) grafiği orijine göre simetriktir

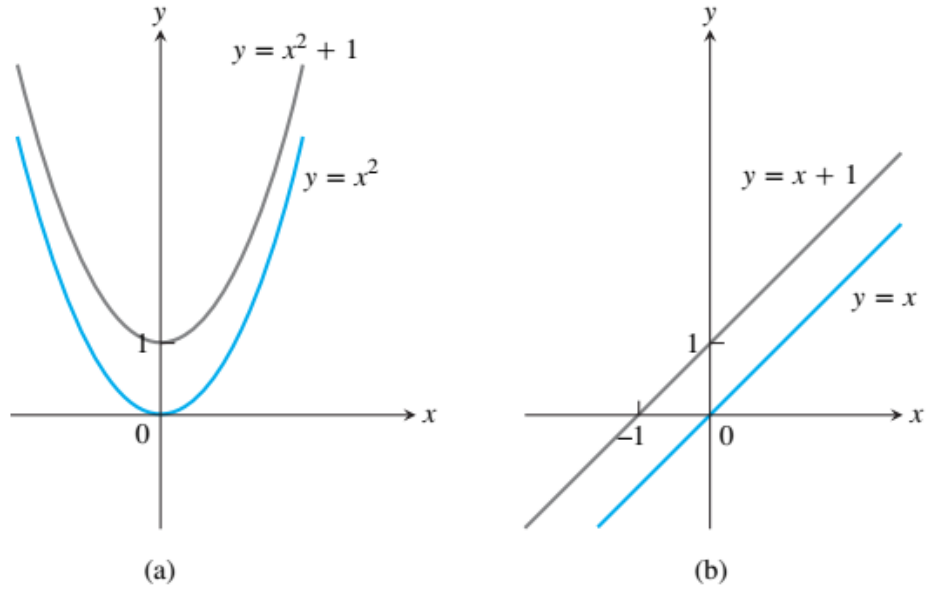
ÖRNEK 2 Çift ve Tek Fonksiyonları Tanımak

$$f(x) = x^2$$

Çift fonksiyon: her x için $(-x)^2 = x^2$; y -eksenine göre simetri.

$$f(x) = x^2 + 1$$

Çift fonksiyon: her x için $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$; y -eksenine göre simetri (Şekil 1.47a).



ŞEKİL 1.47 (a) $y = x^2$ fonksiyonuna 1 sabit terimini eklediğimizde elde edilen $y = x^2 + 1$ fonksiyonu hala bir çift fonksiyondur ve grafiği hala y -eksenine göre simetriktir. (b) $y = x$ fonksiyonuna 1 sabit terimini eklediğimizde elde edilen $y = x + 1$ artık bir tek fonksiyon değildir. Orijin'e göre simetri kaybolmuştur (Şekil 2).

Fonksiyonları Birleştirmek; Grafikleri Kaydırmak ve Ölçeklemek

Toplamlar, Farklar, Çarpımlar ve Bölümler

Yeni fonksiyonlar üretmek için, fonksiyonlar da sayılar gibi toplanabilir, çıkarılabilir, çarpılabilir ve bölünebilir (paydanın sıfır olduğu yerler dışında). f ve g fonksiyonlar ise, hem f 'nin ve hem de g 'nin tanım kümesindeki her x için (yani $x \in D(f) \cap D(g)$ için), we define functions $f + g$, $f - g$ ve fg fonksiyonlarını şu formüllerle tanımlarız.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Şuna dikkat edin; birinci eşitliğin sol tarafındaki $+$ işaretinin fonksiyonların toplama işlemini göstermektedir oysa eşitliğin sağ tarafındaki $+$ işareti ise $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılarının toplamı anlamındadır.

Ayrıca $D(f) \cap D(g)$ nin $g(x) \neq 0$ olan herhangi bir noktasında f/g fonksiyonunu şu formülle tanımlayabiliriz.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

Fonksiyonlar aynı zamanda sabitlerle çarpılabilirler: c bir reel sayı ise f 'nin tanım kümesindeki her x için cf fonksiyonu

$$(cf)(x) = cf(x)$$

ile tanımlanır.

ÖRNEK 1 Fonksiyonları Cebirsel olarak Birleştirmek

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ve} \quad g(x) = \sqrt{1-x}$$

Formülleri ile tanımlanan fonksiyonların tanım kümeleri $D(f) = [0, \infty)$ ve $D(g) = (-\infty, 1]$ dir. Bu tanım kümelerinin ortak noktaları

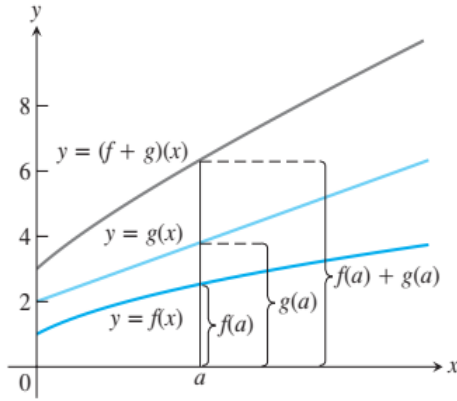
$$[0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1].$$

dir.

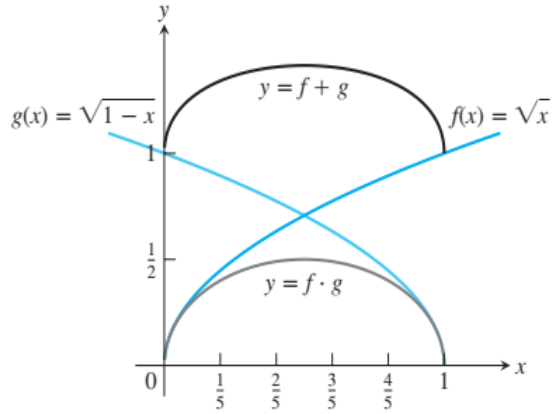
Aşağıdaki tablo bu iki fonksiyonun çeşitli cebirsel kombinasyonlarının formüllerini ve tanım kümelerini özetlemektedir. Ayrıca fg çarpım fonksiyonu için $f \cdot g$ yazıyoruz.

Fonksiyon	Formül	Tanım Kümesi
$f + g$	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f - g$	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$g - f$	$(g - f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0, 1) (x = 1 \text{ hariç})$
g/f	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0, 1] (x = 0 \text{ hariç})$

$f + g$ fonksiyonunun grafiği f ve g nin grafiklerinden Şekil 1.50 deki gibi her $x \in D(f) \cap D(g)$ için karşı gelen y -koordinatları $f(x)$ ve $g(x)$ toplanarak elde edilir. Örnek 1 deki $f + g$ ve $f \cdot g$ nin grafikleri Şekil 1.51 de gösterilmiştir.



ŞEKİL 1.50 İki fonksiyonun grafik toplamı



ŞEKİL 1.51 $f + g$ fonksiyonunun tanım kümesi f ve g , fonksiyonlarının tanım kümelerinin kesişimi, x -ekseni üzerinde bu iki tanım kümesinin örtüştüğü $[0, 1]$ aralığıdır. Bu aralık aynı zamanda $f \cdot g$ fonksiyonunun tanım kümesidir (Örnek 1).

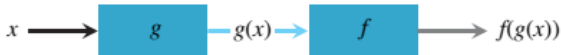
TANIM Fonksiyonların Bileşkesi

f ve g fonksiyonlarının $f \circ g$ (" f bileşke g ") **bileşke** fonksiyonu

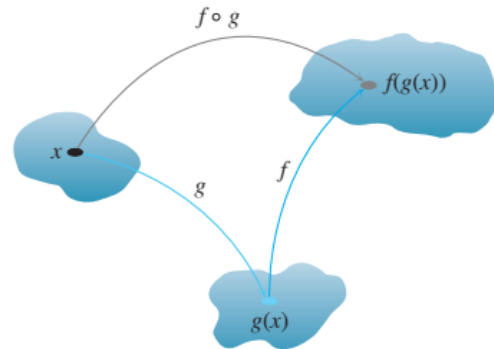
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ile tanımlanır.

$f \circ g$ 'nin tanım kümesi, g 'nin tanım kümesindeki, $g(x)$ 'in f 'nin tanım kümesinde olmasını sağlayan, x 'lerden oluşur.



ŞEKİL 1.52 Bir fonksiyonun x teki değeri diğer fonksiyonun tanım kümesinde yer alıyorsa iki fonksiyonun bileşkesi oluşturulabilir. Bileşke $f \circ g$ ile belirtilir.



ŞEKİL 1.53 $f \circ g$ için ok diyagramı.

ÖRNEK 3 Bileşke için Formül Bulmak

$f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x + 1$ ise

(a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$ (c) $(f \circ f)(x)$ (d) $(g \circ g)(x)$
fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm

Bileşke

Tanım Kümesi

- | | |
|--|---------------------|
| (a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + 1}$ | $[-1, \infty)$ |
| (b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$ | $[0, \infty)$ |
| (c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$ | $[0, \infty)$ |
| (d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$ | $(-\infty, \infty)$ |

$f \circ g$ 'nin tanım kümesinin neden $[-1, \infty)$ olduğunu görmek için, $g(x) = x + 1$ 'in her x için tanımlı olduğunu fakat yalnızca $x + 1 \geq 0$, yani $x \geq -1$ iken f 'nin tanım kümesinde bulunduğuna dikkat edin.

Bir Fonksiyonun Grafiğini Kaydırmak

Kaydırma Formülleri

Dikey Kaydırma

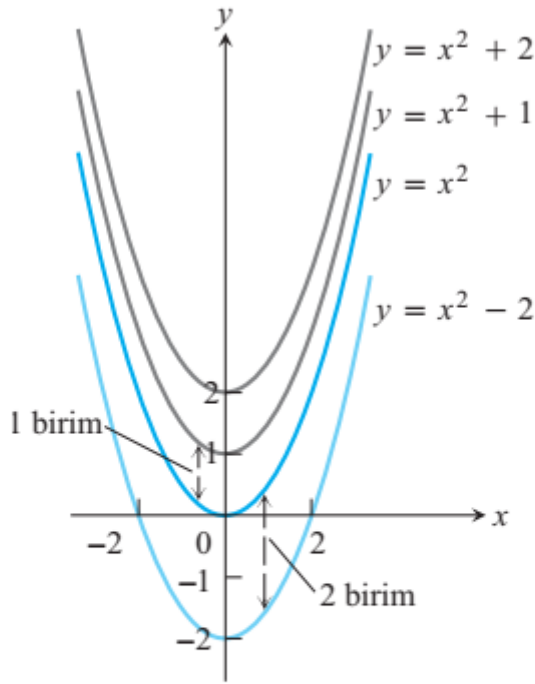
$y = f(x) + k$ $k > 0$ ise f 'nin grafiğini k birim yukarı kaydırır,
 $k < 0$ ise $|k|$ birim aşağı kaydırır.

Yatay Kaydırma

$y = f(x + h)$ $h > 0$ ise f 'nin grafiğini h birim sola kaydırır.
 $h < 0$ ise grafiği $|h|$ birim sağa kaydırır.

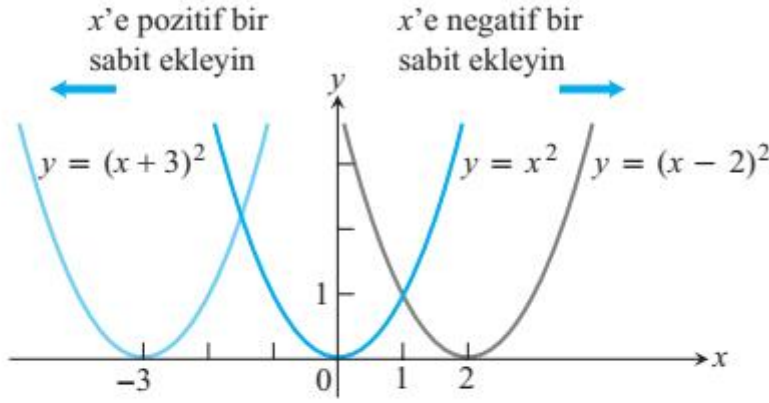
ÖRNEK 4 Bir Grafiği Kaydırmak

- (a) $y = x^2 + 1$ elde etmek için $y = x^2$ formülünün sağ tarafına 1 eklemek grafiği 1 birim yukarı kaydırır (Şekil 1.54).
- (b) $y = x^2 - 2$ elde etmek için $y = x^2$ formülünün sağ tarafına -2 eklemek grafiği 2 birim aşağı kaydırır (Şekil 1.54).



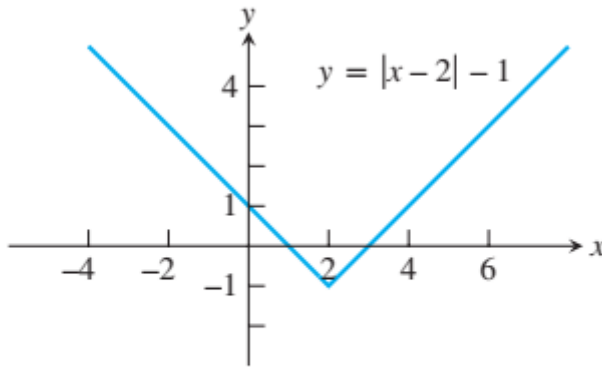
ŞEKİL 1.54 $f(x) = x^2$ 'yi yukarı (veya aşağı) kaydırmak için, f 'in formülüne pozitif (veya negatif) bir sabit ekleriz (Alıştırma 4a ve 4b).

- (c) $y = (x + 3)^2$ elde etmek için $y = x^2$ formülünde x 'e 3 eklemek grafiği 3 birim sola kaydırır (Şekil 1.55).



ŞEKİL 1.55 $y = x^2$ nin grafiğini sola kaydırmak için x 'e pozitif bir sabit ekleriz. Grafiğini sağa kaydırmak için x 'e negatif bir sabit ekleriz (Örnek 4c).

- (d) $y = |x|$ te x 'e -2 eklemek ve sonra sonuca -1 eklemek $y = |x-2| - 1$ 'i verir ve grafiği 2 birim sağa ve 1 birim aşağı kaydırır (Şekil 1.56).



ŞEKİL 1.56 $y = |x|$ 'in grafiğini 2 birim sağa ve 1 birim aşağı kaydırmak (Örnek 4d).

Bir Fonksiyonun Grafiğini Ölçeklemek ve Yansıtmak

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini ölçeklemek, onu dikey veya yatay olarak esnetmek veya sıkıştırmaktır. Bu, f fonksiyonunu veya bağımsız x değişkenini uygun bir c sabiti ile çarpmakla yapılır. Koordinat eksenlerinin bir tarafından diğer tarafına yansıtma $c = -1$ olduğu özel hallerdir.

Dikey ve Yatay Ölçekleme ve Yansıtma Formülleri

$c > 1$ için

$y = cf(x)$ f 'nin grafiğini bir c çarpanı kadar dikey olarak uzatır.

$y = \frac{1}{c}f(x)$ f 'nin grafiğini bir c çarpanı kadar dikey olarak sıkıştırır.

$y = f(cx)$ f 'nin grafiğini bir c çarpanı kadar yatay olarak sıkıştırır.

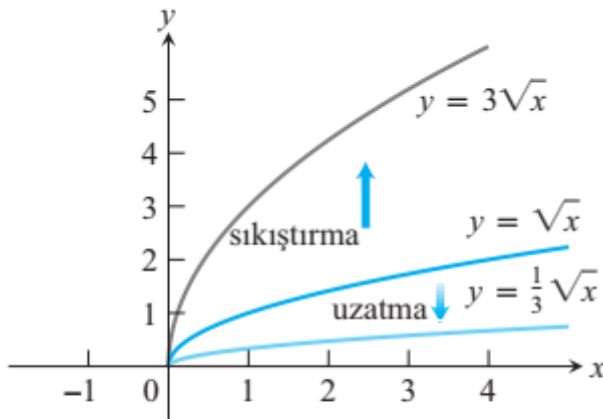
$y = f(x/c)$ f 'nin grafiğini bir c çarpanı kadar yatay olarak uzatır.

$c = -1$ için

$y = -f(x)$ f 'nin grafiğini x -ekseninin diğer tarafına yansıtır.

$y = f(-x)$ f 'nin grafiğini y -ekseninin diğer tarafına yansıtır.

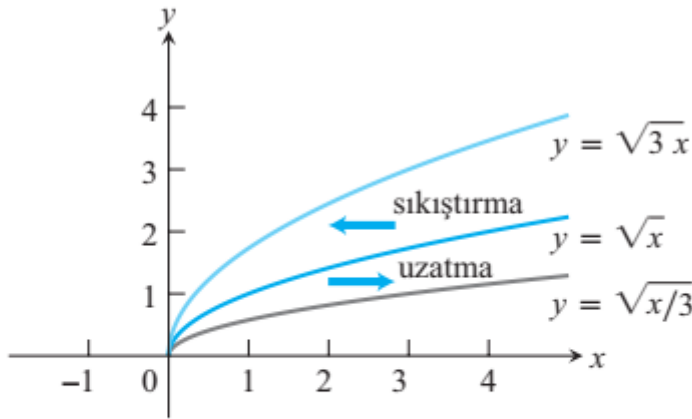
- (a) **Dikey:** $y = 3\sqrt{x}$ elde etmek için $y = \sqrt{x}$ 'in sağ tarafını 3 ile çarpmak, grafiği dikey olarak 3 çarpanı kadar uzatır, oysa $1/3$ ile çarpmak grafiği 3 çarpanı kadar sıkıştırır. (Şekil 1.57).



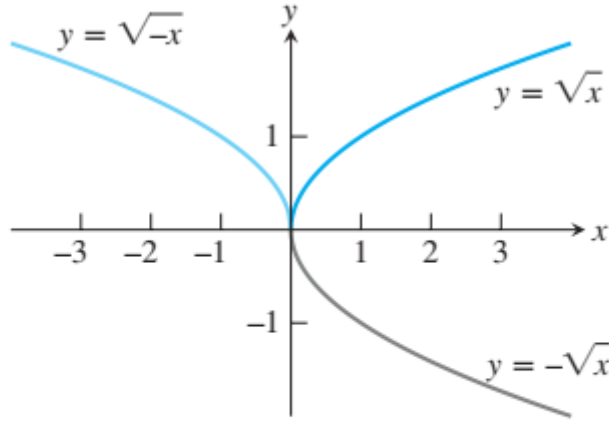
ŞEKİL 1.57 $y = \sqrt{x}$ grafiğinin dikey olarak 3 kat uzatılması ve sıkıştırılması (Örnek 5a).

(b) **Yatay:** $y = \sqrt{3x}$ 'in grafiği, $y = \sqrt{x}$ 'in grafiğinin 3 çarpanı kadar sıkıştırılmıştır ve $y = \sqrt{x/3}$ yatay olarak 3 çarpanı kadar uzatılmasıdır (şekil 1.58). $y = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$ olduğuna dikkat edin, dolayısıyla, bir yatay sıkıştırma farklı bir ölekleme çarpanı ile bir dikey uzatmaya karşı gelebilir. Benzer şekilde, bir yatay uzatma farklı bir ölekleme çarpanı ile bir dikey sıkıştırmaya karşı gelebilir.

(c) **Yansıma:** $y = -\sqrt{x}$ 'in grafiği, $y = \sqrt{x}$ x-ekseninin diğer tarafına bir yansımasıdır, ve $y = \sqrt{-x}$, y-ekseninin diğer tarafına bir yansımadır (şekil 1.59).

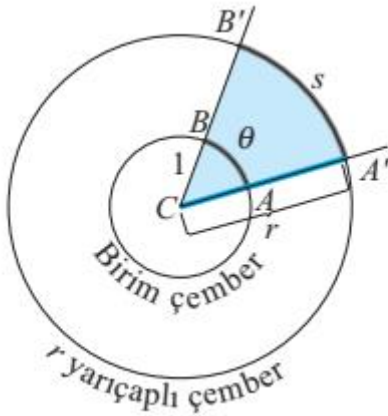


şEKİL 1.58 $y = \sqrt{x}$ grafiğinin yatay olarak 3 kat uzatılması ve sıkıştırılması (rnek 5b).

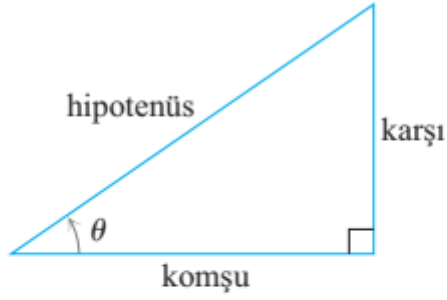


ŞEKİL 1.59 $y = \sqrt{x}$ grafiğinin eksenlerin diğer taraflarına yansıtılması (Örnek 5c). ■

Trigonometrik fonksiyonlar



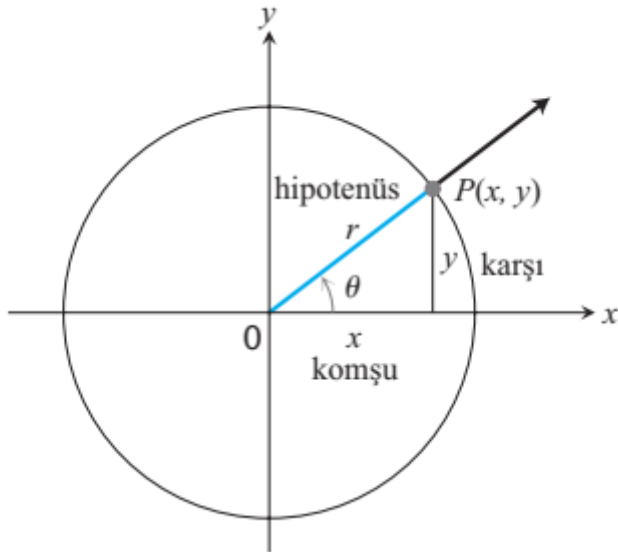
ABC açısının radyan ölçüsü, merkezi C de olan birim çember üzerindeki AB dairesel yayının uzunluğudur.



$$\sin \theta = \frac{\text{karşı}}{\text{hipotenüs}} \quad \csc \theta = \frac{\text{hipotenüs}}{\text{karşı}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{komşu}}{\text{hipotenüs}} \quad \sec \theta = \frac{\text{hipotenüs}}{\text{komşu}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{karşı}}{\text{komşu}} \quad \cot \theta = \frac{\text{komşu}}{\text{karşı}}$$



$$\text{sinüs:} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad \text{kosekant:} \quad \csc \theta = \frac{r}{y}$$

$$\text{cosinüs:} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{sekant:} \quad \sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\text{tanjant:} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{kotanjant:} \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

TABLO 1.4 Seçilmiş bazı θ değerleri için $\sin \theta$, $\cos \theta$ ve $\tan \theta$ değerleri

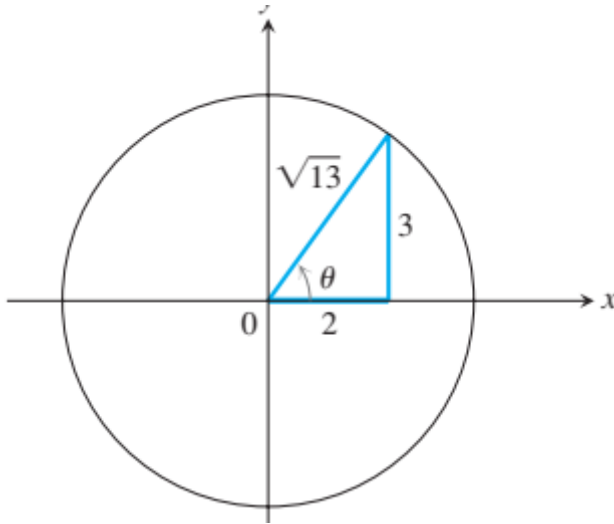
Derece	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radyan)	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \theta$	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0

ÖRNEK 1 Trigonometrik Fonksiyon Değerlerini Bulmak

$\tan \theta = 3/2$ ve $0 < \theta < \pi/2$ ise θ nın diğer beş trigonometrik fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm $\tan \theta = 3/2$ den Şekil 1.72 deki yüksekliği 3 (karşı) ve tabanı 2 (komşu) olan üçgeni çizeriz. Pisagor Teoremi hipotenüs uzunluğunu verir $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$. Üçgenden diğer beş trigonometrik fonksiyonun değerlerini yazarız:

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \csc \theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \quad \cot \theta = \frac{2}{3}$$



Trigonometrik Fonksiyonların Periyodikliği ve Grafikleri

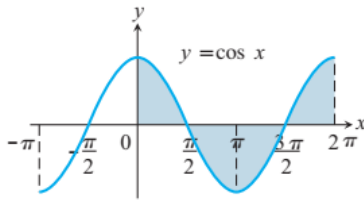
θ ölçüsünde bir açı ile $\theta + 2\pi$ ölçüsünde bir açı standart konumdaysalar, bitiş ışınları çakışır. Dolayısıyla iki açının da trigonometrik değerleri aynıdır:

$$\begin{array}{lll} \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta & \sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta & \tan(\theta + 2\pi) = \tan \theta \\ \sec(\theta + 2\pi) = \sec \theta & \csc(\theta + 2\pi) = \csc \theta & \cot(\theta + 2\pi) = \cot \theta \end{array}$$

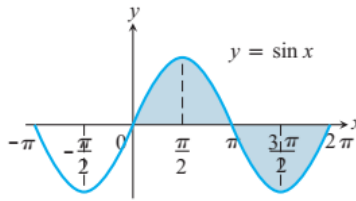
Benzer olarak, $\cos(\theta - 2\pi) = \cos \theta$, $\sin(\theta - 2\pi) = \sin \theta$ vs. Bu tekrar etme davranışını, altı temel trigonometrik fonksiyon *periyodiktir* şeklinde tanımlarız.

TANIM Periyodik Fonksiyon

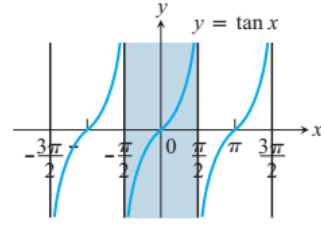
Her x değeri için, $f(x + p) = f(x)$ olacak şekilde bir p değeri bulunabiliyorsa, $f(x)$ fonksiyonu periyodiktir. Böyle en küçük p değerine f 'nin **periyodu** denir.



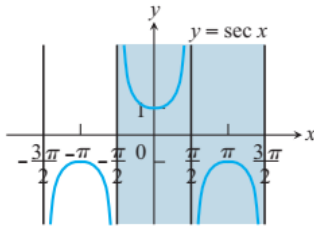
Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$
Değer kümesi: $-1 \leq y \leq 1$
Periyot: 2π
(a)



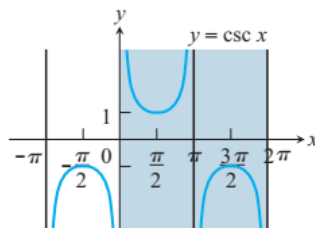
Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$
Değer kümesi: $-1 \leq y \leq 1$
Periyot: 2π
(b)



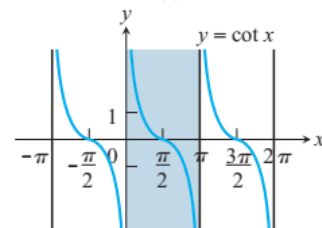
Tanım kümesi: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
Değer kümesi: $-\infty < y < \infty$
Periyot: π
(c)



Tanım kümesi: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
Değer kümesi: $y \leq -1$ ve $y \geq 1$
Periyot: 2π
(d)



Tanım kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
Değer kümesi: $y \leq -1$ ve $y \geq 1$
Periyot: 2π
(e)



Tanım kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$
Değer kümesi: $-\infty < y < \infty$
Periyot: π
(f)

Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu

Periyot π : $\tan(x + \pi) = \tan x$
 $\cot(x + \pi) = \cot x$

Periyot 2π : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
 $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
 $\sec(x + 2\pi) = \sec x$
 $\csc(x + 2\pi) = \csc x$

Çift

Tek

$$\cos(-x) = \cos x$$

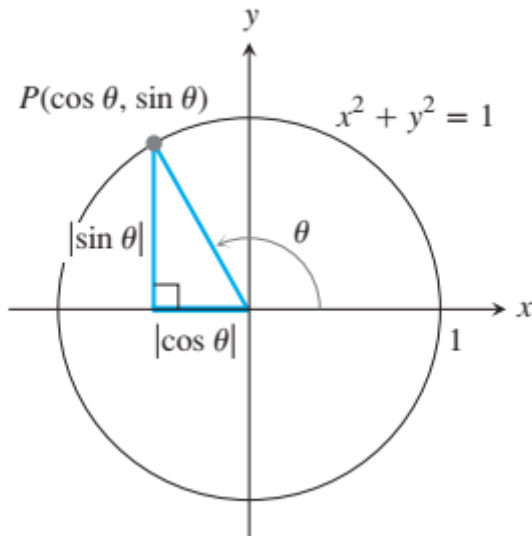
$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\sec(-x) = \sec x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\csc(-x) = -\csc x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$



$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

Her θ değeri için doğru olan bu denklem, trigonometride en fazla kullanılan özdeşliktir. Bu denklemi sırasıyla $\cos^2 \theta$ ve $\sin^2 \theta$ ile bölmek şu bağıntıları verir:

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Çift -Açı Formülleri

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

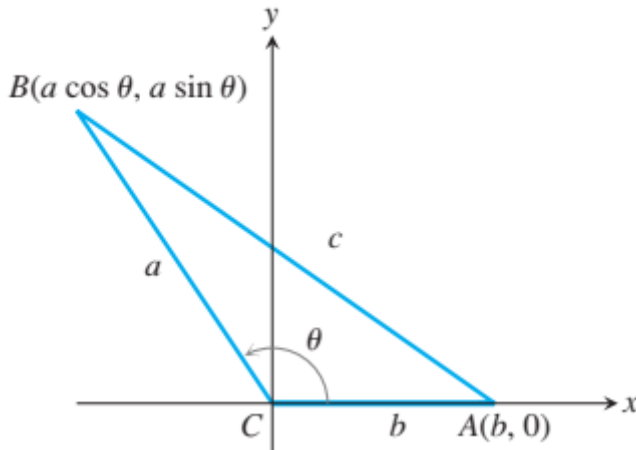
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

İki denklemi toplayarak $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$ ve ikinci denklemi birinciden çıkartarak $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ elde ederiz. Buradan, integral hesapta kullanışlı olan aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

Yarım-Açı Formülleri

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$



Kaynak :Thomas Calculus cilt 1

Hazırlayan :Nuran GÜZEL

Kosinüs Kuralı

a , b ve c bir ABC üçgeninin kenarları ve θ 'da c 'nin karşısındaki açıysa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos \theta$$

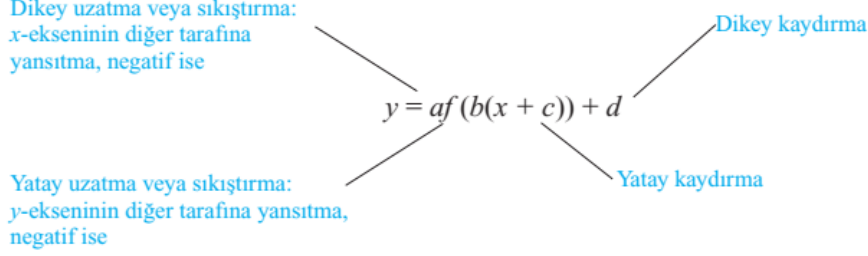
denklemini elde edilir. Bu denkleme **kosinüs kuralı** denir.

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \cos \theta - b)^2 + (a \sin \theta)^2 \\ &= a^2(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) + b^2 - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

Ha

Trigonometrik Grafiklerin Dönüşümü

Kaydırma, uzatma, sıkıştırma ve yansıtma kuralları trigonometrik fonksiyonlara uygulanır. Aşağıdaki diyagram size, parametrelerin kontrolünü hatırlatacaktır.

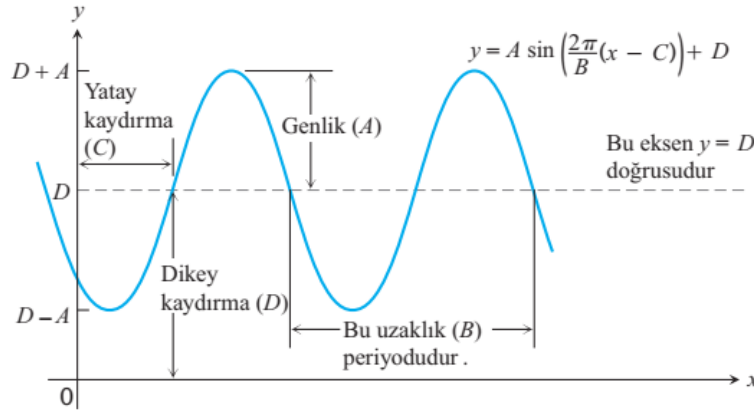


ÖRNEK 2 Alaska'daki Sıcaklığı Modelleme

Trans-Alaska boru hattının yapımcıları boru hattındaki sıcak petrolün ısısının alttaki sürekli olarak donmuş bulunan toprağı eritmesini engellemek için yalıtıcı yastıklar kullanmışlardır. Yastıklara şekil verebilmek için, yıl içindeki hava sıcaklığı değişimlerini hesaba katmaları gerekmiştir. Değişimler,

$$f(x) = A \sin \left[\frac{2\pi}{B} (x - C) \right] + D$$

şeklinde genel bir **sinüs fonksiyonu** veya **sinüzoid** ile temsil edilmiştir. Burada $|A|$ genliği, $|B|$ periyodu, C yatay kaymayı ve D dikey kaymayı göstermektedir. (Şekil 1.76)



ŞEKİL 1.76 Pozitif A , B , C ve D için $y = A \sin [(2\pi/B)(x - c)] + D$ genel sinüs eğrisi (Örnek 2).

Şekil 1.77 böyle bir fonksiyonun sıcaklık verilerini temsil etmekte nasıl kullanılacağını göstermektedir. Şekildeki veri noktaları 1941'den 1970'e kadar Ulusal Hava Servisi'nden alınan verilere dayanan Fairbanks, Alaska için ortalama hava sıcaklıklarıdır. Verilere uydurulan sinüs fonksiyonu, f Fahrenheit cinsinden sıcaklık ve x yılın başından itibaren geçen gün sayısı olmak üzere

$$f(x) = 37 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (x - 101) \right] + 25$$

