3-a) $A(1,6,-4)$ noktasından geçen ve $x=1+2t,\ y=2-3t,\ z=3-t$ doğrusunu içeren düzlemin denklemini bulunuz. *(12 Puan)*

2

$A(1,6,-4)$ $B(1,2,3)$ (doğrudan) $t=1$ alarak $C(3,$

ol

$\overrightarrow{AB} = -4\vec{j} + 7\vec{k}$ $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + 6\vec{k}$ } 2

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 25\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}$ } 3

$\vec{n} \cdot \langle x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0 \rangle = 0$

$\langle 25, 14, 8 \rangle \langle x-1,\ y-6,\ z+4 \rangle = 0$

$25(x-1) + 14(y-6) + 8(z+4) = 0$

$25x + 14y + 8z = 77$ //

3

2) (A Gr.) $A=(1\,,0\,,-1)$ ve $B=(2\,,1\,,0)$ noktalarından geçen ve $3x-y=4$ ve $x+y+z=5$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

3/ 3/

$3x-y=4 \rightarrow \vec{n}_1 =<3\,,-1\,,0>$; $x+y+z=5 \rightarrow \vec{n}_2 =<1\,,1\,,1>$; $\overrightarrow{AB} =<1\,,1\,,1>$ 2/

Doğruya paralel $\vec{v}$ vektör : $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$

3/ 3/

Düzlemin normali : $\vec{n}=\vec{v}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -3 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$

3/ 3/

Düzlemin denklemi: $-7(x-1)+5(y-0)+2(z+1)=0 \Rightarrow 7x-5y-2z=9$

5/

2) (B Gr.) $A=(0\,,1\,,-1)$ ve $B=(2\,,0\,,1)$ noktalarından geçen ve $x-y+2z=3$ ve $-x+3z=5$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

$x-y+2z=3 \rightarrow \vec{n}_1 =<1\,,-1\,,2>$; $-x+3z=5 \rightarrow \vec{n}_2 =<-1\,,0\,,3>$; $\overrightarrow{AB} =<2\,,-1\,,2>$

Doğruya paralel $\vec{v}$ vektör : $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=-3\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}$

Düzlemin normali : $\vec{n}=\vec{v}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -5 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=-11\vec{i}+4\vec{j}+13\vec{k}$

Düzlemin denklemi: $-11(x-0)+4(y-1)+13(z+1)=0 \Rightarrow 11x-4y-13z=9$

3) Aşağıda verilen eğrinin, t nin artışı yönündeki s yay uzunluk fonksiyonunu bulunuz. (12P)

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-2t)\vec{j} + \vec{k}, \quad t \geq 0.$$

$\vec{r}'(t) = (t-1)\vec{i} + \sqrt{3}(t-1)\vec{j} \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(t-1)^2 + 3(t-1)^2} = 2|t-1|$

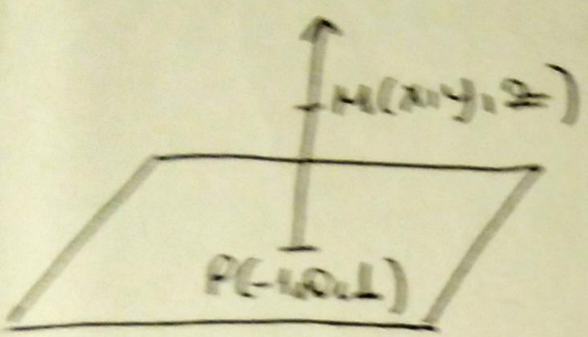
$s = \int_0^t \|\vec{r}'(u)\| du = \int_0^t 2|u-1| du$

$t \leq 1$ için $s(t) = \int_0^t 2(1-u) du = -(1-u)^2 \Big|_0^t = 1-(1-t)^2$

$t > 1$ için $s(t) = \int_0^1 2(1-u) du + \int_1^t 2(u-1) du$

$= -(1-u)^2 \Big|_0^1 + (u-1)^2 \Big|_1^t = (t-1)^2 + 1.$

4) b) $2x-y+7z=12$ düzlemine dik, $(-1,0,1)$ noktasından geçen doğrunun parametrik denklemini yazınız.



$\vec{PM} \parallel \vec{n}$

$\vec{PM} = \lambda \vec{n}$

$(x+1, y, z-1) = \lambda (2,-1,7)$

$\vec{n} = (2,-1,7)$

$x+1 = 2\lambda$ $x = 2\lambda - 1$

$y = -\lambda$ $y = -\lambda$

$z-1 = 7\lambda$ $z = 7\lambda + 1$

1-a) Uzayda hareket eden bir parçacığın hızı, t zamanında, $\vec{v}(t)=(t+1)\vec{i}+(t^2-1)\vec{j}+(2t)\vec{k}$ ile verilmiştir. $t=1$ anındaki hız ve ivme vektörleri arasındaki açıyı hesaplayınız. Eğer $t=0$ anında parçacık $(1,-1,2)$ noktasında konumlanmış ise, t zamanında bu parçacığın, $\vec{r}(t)$ konum vektörünü bulunuz. (12 puan)

$\vec{a}(t)=\frac{d}{dt}(\vec{v}(t))=\vec{i}+2t\vec{j}+2\vec{k}$ $\quad \vec{v}(1)=2\vec{i}+2\vec{k}$ $\quad \vec{a}(1)=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

$|\vec{v}(1)|=2\sqrt{2}\ , \ |\vec{a}(1)|=3$

$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}(1)\cdot\vec{a}(1)}{|\vec{v}(1)|\cdot|\vec{a}(1)|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{(2\vec{i}+2\vec{k})\cdot(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})}{2\sqrt{2}\cdot 3}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$

çıkarıldı

$\vec{r}(t)=\int\vec{v}(t)\,dt=\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\vec{i}+\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\vec{j}+t^2\vec{k}+\vec{c}$, $\vec{r}(0)=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ ise

$\vec{r}(0)=\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ $\Rightarrow$

$\vec{r}(t)=\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)\vec{i}+\left(\frac{t^3}{3}-t-1\right)\vec{j}+(t^2+2)\vec{k}$ //

$\frac{dr}{dt}=2at\,\vec{i}+b\vec{j}+\frac{c}{t}$ $\qquad \left|\frac{dr}{dt}\right|=\sqrt{4a^2t^2+b^2+\frac{c^2}{t^2}}$

$\sqrt{3}$

1-b) $\vec{r}(t)=at^2\vec{i}+bt\,\vec{j}+c\ln t\,\vec{k}$, $(1\le t\le T)$ eğrisinin uzunluğunu bir belirli integral olarak ifade edip, $b^2=4ac$ iken, eğrinin uzunluğu hesaplayınız.($a,b,c,T\in\mathbb{R}$). (13 puan)

$L=\int_1^T\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt=\int_1^T\sqrt{4a^2t^2+b^2+\frac{c^2}{t^2}}\,dt$

$b^2=4ac \Rightarrow \quad L=\int_1^T\sqrt{\underbrace{4a^2t^2+4ac+\frac{c^2}{t^2}}_{(2at+\frac{c}{t})^2}}\,dt=\int_1^T\left(2at+\frac{c}{t}\right)dt$

?

$=aT^2+c\ln T-a=a(T^2-1)+c\ln T$ //

$=2a\frac{t^2}{2}+c\ln t\Big|_1^T=aT^2+c\ln T-a$

$|D(x,y)|$ $\quad |u_x$

3) a) $(1,1,1)$ ve $(2,0,3)$ noktalarından geçen ve $x+2y-3z=0$ düzlemine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

b) $f(x)=x^2y$ fonksiyonunun $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ doğrultusundaki değişiminin $(-1,1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm:

a) $P_1=(1,1,1)$ ve $P_2=(2,0,3)$ olsun.

$\vec{V_1}=\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

verilen düzlemin normali $\vec{V_2}=\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ dır.

$\vec{V_1}$ ve $\vec{V_2}$ aranan düzleme paralel (düzlem üzerinde)

olup. bu düzlemin $\vec{N}$ normali

$$\vec{N}=\vec{V_1}\times\vec{V_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}$$ olur.

Böylece P_1 den geçen ve normali $\vec{N}$ olan düzlem,

$(x-1)-5(y-1)-3(z-1)=0$ ya da $x-5y-3z=-7$ dir

Soru 1-a) Denklemleri $x-y+2z=2$ ve $x+2y+z=7$ olan düzlemlerin arakesit doğrusundan ve $P(1,1,2)$ noktasından geçen **düzlemin denklemini bulunuz.**

-b) *a)* da bulduğunuz düzlemin $\mathbf{r}(t)=(1+t)\,\mathbf{i}+(2+t)\,\mathbf{j}-t\,\mathbf{k}$ doğrusuna **paralel** olup-olmadığını tespit ediniz.

Çözüm:

$x-y+2z=2 \quad \vec{n}_1=\langle 1,-1,2\rangle$

$x+2y+z=7 \quad \vec{n}_2=\langle 1,2,1\rangle$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$-5\vec{i}+\vec{j}+3k$

$-5(x-$

$2x+y+3z=9$ (Doğrudan sonuç)

a) $(x-y+2z-2)+\lambda(x+2y+z-7)=0 \quad (*)$

$P(1,1,2)$ de $(1-1+4-2)+\lambda(1+2+2-7)=0$

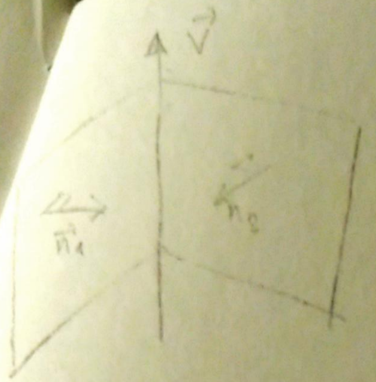
$2-2\lambda=0 \quad \lambda=1 \quad$ 07

(*)dan $x-y+2z-2+x+2y+z-7=0$

$2x+y+3z=9$ 08 düzlem denk.

b) $\vec{n}=\langle 2,1,3\rangle$ ve $\vec{v}=\langle 1,1,-1\rangle$ 04

$\vec{n}\cdot\vec{v}=2+1-3=0$ 06 old bulunan düzlem, verilen doğruya paraleldir.



$$\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = -5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$ ϕ5

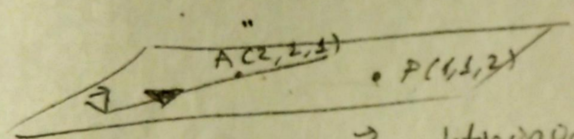
Kesişim doğrusu üzerinde keyfi bir nokta

örneğin $\underline{\underline{z=1}}$ için

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ x + 2y + z &= 7 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + 2y &= 6 \\ \hline -3y &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= 2 \,// \\ x &= 2 \,// \end{aligned}$$

ϕ5

A(2,2,1) noktası tüm düzlemlerin ve arakesit doğrusunun üzerindedir.



$\vec{PA}$ vektörü ve $\vec{v}$ vektörünün vektörel çarpımı $\vec{N}$'yi verir.

$$\vec{N} = \vec{PA} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\cancel{4} \cdot (x-1) + \cancel{2} \cdot (y-1) + \cancel{6} \cdot (z-2) = 0$$

$$2x - 2 + y - 1 + 3z - 6 = 0$$

$$\boxed{2x + y + 3z = 9}$$

ϕ5

Parametrik denklemleri aşağıda verilen L_1 ve L_2 doğrularının kesiştiği noktayı ve bu doğrulardan geçen düzlemin denklemini bulunuz.

$L_1: \quad x = 2t+1 \quad y = 3t+2 \quad z = 4t+3$

$L_2: \quad x = s+2 \quad y = 2s+4 \quad z = -4s-1$

İki doğrunun kesiştiği nokta;

$x = 2t+1 = s+2 \qquad 2t - s = 1 \qquad 2t - \cancel{s} = 1$

$y = 3t+2 = 2s+4 \qquad 3t - 2s = 2 \qquad t + \cancel{s} = -1$

$z = 4t+3 = -4s-1 \qquad 4t + 4s = -4 \qquad 3t = 0$

$t + s = -1 \qquad t = 0$

$s = -1$

$z =$

$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3 \quad A(1,2,3)$ arakesit noktası

L_1 doğrusu $\vec{V_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \vec{V_2} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ vektörüne paraleldir.

$= \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{-4}$

$$\vec{n} = \vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -20\vec{i} + 12\vec{j} + \vec{k}$$

ile belirlenen $\vec{n}$ vektörü $\vec{V_1}$ ve $\vec{V_2}$ vektörlerinin her ikisine dolayısıyla bu vektörlerden geçen düzleme dik olacaktır. Düzlemin denklemi

$-20x + 12y + z = D \Rightarrow \boxed{-20x + 12y + z = 7}$

Bu düzlemin $A(1,2,3)$ noktasından geçeceği dikkate alınarak

Ör. (11)

$5x - 2y = 11$
$4y - 5z = -17$ düzlemlerinin arakesiti olan doğrunun denklemini bulunuz.

Bu düzlemlere dik olan vektörler sırasıyla

$5x - 2y = 11$ → dik olan vektör

$\vec{n_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$

$4y - 5z = -17$

$\vec{n_2} = 4\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{n_1}$ ile $\vec{n_2}$ nin vektörel çarpımı sonucu oluşan vektör $\vec{n_1}$ ve $\vec{n_2}$ nin herikisine dik dolayısıyla söz konusu düzlemlerin arakesiti olan doğruya paralel olacaktır.

$$\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 25\vec{j} + 20\vec{k}$$ dır.

$5x - 2y = 11$
$4y - 5z = -17$ $\quad n = 3 \quad r = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -5 & -17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/5 & 0 & -11/5 \\ 0 & 1 & -5/4 & -17/4 \end{array}\right]$$

Düzlemlerin arakesiti olan doğrunun noktası $\boxed{z = 1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -5/4 & -17/4 \end{array}\right]$$

$x + z/2 = -1/2 \qquad z = 1$

$y - \frac{5}{4}z = -17/4 \qquad x = -1/2 - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$x = -3/4$

$y - \frac{5}{4} = -17/4 \qquad y = \frac{5}{4} - \frac{17}{4} = -\frac{12}{4}$

$y = -3$

$A(-1, -3, 1)$ noktasından geçen $\vec{v} = 10\vec{i} + 25\vec{j} + 20\vec{k}$ vektörüne paralel doğru denklemi

$$\frac{x+1}{10} = \frac{y-(-3)}{25} = \frac{z-1}{20}$$ dır.

1911

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

Spor Birliği Başkanlığı

Sayı : B.30.2.YIL.0.6B.00.00

Konu :

Tarih:

S4) $A(1,2,3)$ noktasından geçen ve

l : $x=5+t$ $y=1+3t$, $z=4t$

doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

l doğrusunun denklemi

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}=t$$

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$P(x_0,y_0,z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denk.)

l doğrusu $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ vektörüne paraleldir. (Doğru denkleminden)

$\cancel{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)}=D$

Dolayısıyla aradığımız düzleme diktir.

Düzlemin denklemi, $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$x+3y+4z=D$ dir $1(x-1)+3(y-2)+4(z-3)=0$

$x=1$ $y=2$ $z=3$ için

$D=19$

Düzlemin denklemi $x+3y+4z=19$ olur.

(1)

1911

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

Spor Birliği Başkanlığı

Sayı : B.30.2.YIL.0.6B.00.00 Tarih:

Konu :

Ör; $A(2,1,-1)$ noktasından geçen ve

$x+y+z=10$
$2x-y+5z=12$ } düzlemlerinin arakesit doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulunuz

$x+y+z=10$ düzlemine $\vec{n_1}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ vektörü

$2x-y+5z=12$ " $\vec{n_2}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ "

diktir. $\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=6\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$

vektörü ise $\vec{n_1}$ ve $\vec{n_2}$ vektörlerine diktir.

Dolayısıyla arakesit doğrusuna paraleldir.

Bu arakesit doğrusu aradığımız düzleme dik olacağından bu düzlemin denklemi

$6(x-2)+3(y-1)+(-3)(z+1)$

$6x-3y-3z=12$ dir.

$ax_0+by_0+cz_0=D$

$6.2+(-3).1-3(-1)$

$A(2,1,-1)\downarrow$ $6.2-3.\cancel{1}-3\cancel{(-1)}=12$

$6x-3y-3z=12$

a/ A(1,-2,3) noktasından geçen ve $x-2y+4z=5$ düzlemine dik olan doğru denklemini bulun.

$(1,-2,3)=(x_0,y_0,z_0)$ noktasından geçen

$Ax+By+Cz=D$

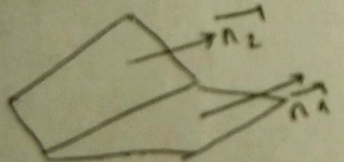
$\vec{n}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ yönündeki doğru

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$ doğrunun denklemi

P_0 noktasından geçen $\vec{v}$ ye dik olan düzlem denk.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{4}$$

* $\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ y+2z=6 \end{array}\right\}$ düzlemlerinin kesişmesiyle oluşan doğrunun doğrultu vektörünü bulunuz ve doğrunun standart formunu bulunuz.



$\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

$\vec{n_1}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{n_2}=\vec{j}+2\vec{k}$

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$$, $\vec{n_1}$ ve $\vec{n_2}$ ye diktir.

Dolayısıyla söz konusu düzlemlerin ardkesiti olan doğruya paraleldir.

$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ y+2z=6 \end{array}\right\}$ $z=0$, $y=6$, $x=-6$

$$\frac{x+6}{3}=\frac{y-6}{-2}=\frac{z-0}{1}$$