

(4-b) Diferansiyel yaklaşımı kullanarak, $\sqrt{4(\underbrace{1.04}_x)^2 + 3(\underbrace{2.24}_y)^2}$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm Verilen yapıyı koruyan uygun bir fonksiyon olarak

$$f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 3y^2}$$

$$f_x = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 3y^2}}$$

alabiliriz ve

$$\sqrt{4(1)^2 + 3(2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

olduğundan, hesabı kolaylaştıracak sayılar olarak a = 1 ve b = 2 seçebiliriz. Buna göre,

$$\Delta x = 1.04 - 1 = 0.04 \quad \text{ve} \quad \Delta y = 2.24 - 2 = 0.24$$

olur. Ayrıca,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 3y^2}} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y}{\sqrt{4x^2 + 3y^2}}$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

olduklarından, $f_x(1, 2) = 1$ ve $f_y(1, 2) = \frac{3}{2}$ dir. Şimdi, $f(1, 2) = 4$ olup,

$$\begin{aligned} \sqrt{4(1.04)^2 + 3(2.24)^2} &= f(1.04, 2.24) \\ &\approx f(1, 2) + f_x(1, 2) \cdot (0.04) + f_y(1, 2) \cdot (0.24) \\ &= 4 + (1) \cdot (0.04) + \frac{3}{2} \cdot (0.24) = 4.40 \end{aligned}$$

dir. ◁

2-a) $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$ fonksiyonunun seviye eğrisine $P(2, 3)$ noktasında teğet olan doğru için bir denklem bulunuz.

Çözüm Verilen fonksiyonun, $P(2, 3)$ noktasındaki seviye eğrisi

$$9x^2 + 4y^2 = 72$$

şeklindeki elipstir. Fonksiyonun, $P(2, 3)$ noktasındaki gradyeni

$$\nabla f(x, y) = 18xi + 8yj \quad \text{ve} \quad \nabla f(2, 3) = 36i + 24j$$

olup, teğet doğrunun denklemi

$$(36)(x - 2) + (24)(y - 3) = 0 \quad \text{veya} \quad 3x + 2y = 12$$

olarak bulunur. ◀

$$f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) = 0$$

$$-1h \sin \frac{1}{|h|} + 1h \sin \frac{1}{|h|} = 0$$

$$(2-b) \text{ Eğer } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ise, $f_x(0, 0)$ ve $f_y(0, 0)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm f nin $(0, 0)$ noktasında kısmi türevlerini hesaplamak için tanımı kullanmak gerekiyor. Tanım ve limitler için Sıkıştırma Kuralı kullanılarak

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \sin \frac{1}{|h|} \right) = 0 \quad \text{lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{|h|}}{\frac{1}{h}}$$

ve

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \left(k \sin \frac{1}{|k|} \right) = 0$$

bulunur. ◀

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{|h|}}{h}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{h}}{\frac{1}{h^2}}$$

$$-1h^2 \sin \frac{1}{h} < 1h^2$$

(2-b) Eğer g , türevlenebilir bir fonksiyon ve z , x ve y nin bir fonksiyonu olarak $xz = x^2 + g(xy)$ ile verilmişse, $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - z$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm Kısmi türevler, $x \neq 0$ olduğu kabul edilerek

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2} g(xy) + \frac{y}{x} g'(xy) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = g'(xy)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} &= x \left(1 - \frac{1}{x^2} g(xy) + \frac{y}{x} g'(xy) \right) - y g'(xy) = x - \frac{1}{x} g(xy) + y g'(xy) - y g'(xy) \\ &= x - \frac{1}{x} g(xy) = 2x - \left(x + \frac{1}{x} g(xy) \right) = 2x - x - \frac{1}{x} g(xy) \\ &= 2x - z \end{aligned}$$

çıkar. ◀

$$xz = x^2 + g(xy) \quad z = z(x, y)$$

$$z = x + \frac{1}{x} g(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \left(-\frac{1}{x^2} g(xy) + g'(xy) \cdot y \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2} g(xy) + \frac{y}{x} g'(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} g'(xy)$$

~~18, 21, 22, 23, 24, 25, 26~~
~~32, 33~~
mes km.

Yılı Bahar Dönemi 16.05.2009
 2 - 2. Yılıçi Sınavı Cevap Anahtarı

A Gr.

1) b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 3y^2 - 2x^3y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ a & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun (0,0) noktasında limitinin mevcut olduğu bilindiğine göre, bu noktada sürekli olması için a ne olmalıdır?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) \text{ olmalıdır.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 3y^2 - 2x^3y^2}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 3y^2 - 2x^3y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\Rightarrow f(0, 0) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{(5 - 2x^3)}{2x^2} = 3$$

B Gr.

1) b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + 5x^2y^3}{2x^2 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ a & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun (0,0) noktasında limitinin mevcut olduğu bilindiğine göre, bu noktada sürekli olması için a ne olmalıdır?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) \text{ olmalıdır.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 5x^2y^3}{2x^2 + 2y^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2 + 5x^2y^3}{2x^2 + 2y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(0, 0) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

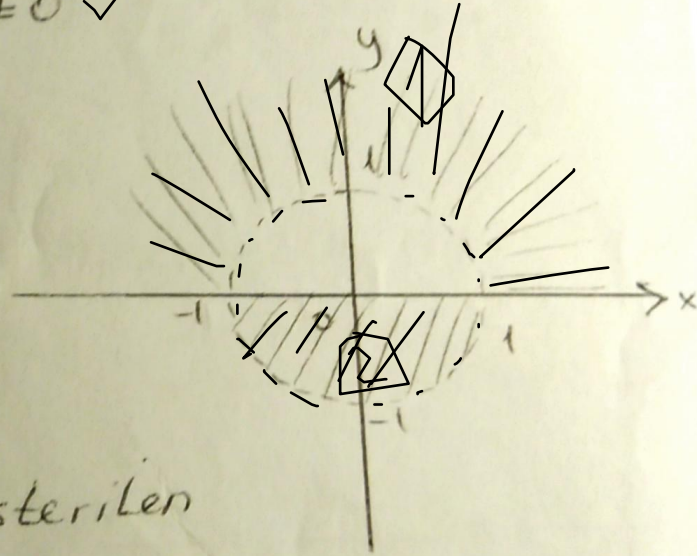
2. a) $z = \ln \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve koordinat düzleminde gösteriniz.

- b) $f(x, y) = \frac{x \cos \frac{\pi}{2} y}{x + y - 2}$ fonksiyonunun $(1, 1)$ noktasındaki limitinin varlığını inceleyiniz.

a) $\frac{y}{x^2 + y^2 - 1} > 0 \checkmark$ ve $x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \checkmark$

$y > 0$
 $x^2 + y^2 - 1 > 0$
 $y > 0$
 $x^2 + y^2 > 1$

$y < 0$
 $x^2 + y^2 - 1 < 0$
 $y < 0$
 $x^2 + y^2 < 1$



Tanım bölgesi taralı olarak gösterilen bölgedir.

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x \cos \frac{\pi}{2} y}{x + y - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\lim_{y \rightarrow 1} \frac{x \cos \frac{\pi}{2} y}{x + y - 2} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x \cos \frac{\pi}{2}}{x - 1} \right] = 0 \checkmark$

$\lim_{y \rightarrow 1} \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cos \frac{\pi}{2} y}{x + y - 2} \right] = \lim_{y \rightarrow 1} \left[\frac{\cos \frac{\pi}{2} y}{y - 1} \right] \rightarrow \frac{0}{0} \neq$
 $= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} y}{1} = -\frac{\pi}{2}$

S. 3-a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot \ln(1+y)}{x^2+y^2}$

limitinin varlığını araştırınız. (10 P)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{0}{y^1} \right] = 0$$

x-ekseni boyunca, $y=0$ olup,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot \ln(1+y)}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln(1+0)}{x^2+0} = 0 \checkmark$$

diğerine rağmen, $y=x$ değeri boyunca,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot \ln(1+y)}{x^2+y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln(1+x)}{x^2+x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} \checkmark \quad \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 \checkmark \end{aligned}$$

olduğundan, limit yok .

S. 3-b) Eğer mevcut ise, $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^4})$ ile verilen f fonksiyonu için $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ değerlerini (f nin $(0,0)$ noktasında x ve y ye göre 1.mertebe kısmi türevlerini) bulunuz. (15 P)

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{h^2-0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin|h|}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-h)}{h} = -1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan, $f_x(0,0)$ yok .

$$\begin{aligned} f_y(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{h^4-0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h^2}{h^2} \cdot h \right) = 0 \checkmark \end{aligned}$$

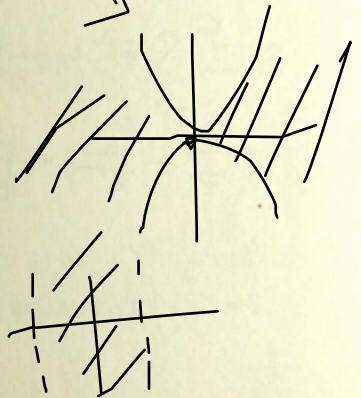
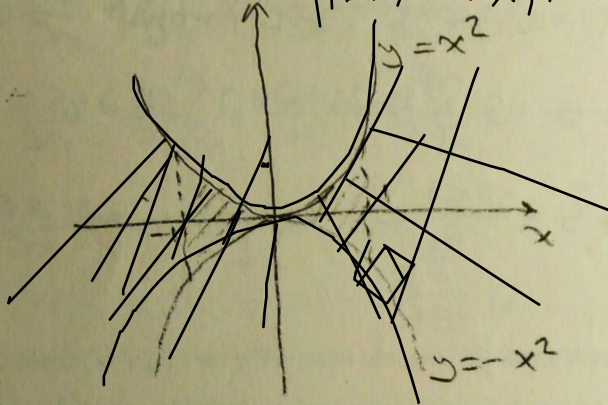
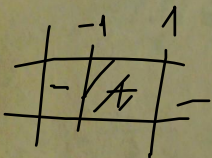
S. 2-a) $f(x,y) = \arccos\left(\frac{y}{x^2}\right) + \ln(1-x^2)$ ile verilen f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
(Şekil çizilecek) (15 P)

$$z_1 = \arccos \frac{y}{x^2} \Rightarrow \cos z_1 = \frac{y}{x^2}$$

$$-1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ -1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ -x^2 \leq y \leq x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ 1 \leq y \end{array} \right\}$$

$$z_2 = \ln(1-x^2), \quad 1-x^2 > 0 \text{ olmalı} \Rightarrow (1-x)(1+x) > 0$$



S. 2-b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sqrt{1+3x^2y^2} - 2}{xy - 1}$ limitini hesaplayınız. (10 P)

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(\sqrt{1+3x^2y^2} - 2)(\sqrt{1+3x^2y^2} + 2)}{(xy - 1)(\sqrt{1+3x^2y^2} + 2)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{3(x^2y^2 - 1)}{(xy - 1)(\sqrt{1+3x^2y^2} + 2)} \quad (xy \neq 1)$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{3(xy + 1)}{\sqrt{1+3x^2y^2} + 2} = \frac{3 \cdot 2}{2 + 2} = \frac{3}{2}$$

Soru 3) Aşağıda verilen eğrinin, t nin artışı yönündeki s yay uzunluk fonksiyonunu bulunuz. (12P)

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2 \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2 - 2t) \vec{j} + \vec{k}, \quad t \geq 0.$$

$$\vec{r}'(t) = (t-1)\vec{i} + \sqrt{3}(t-1)\vec{j} \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(t-1)^2 + 3(t-1)^2} = 2|t-1|$$

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}'(u)\| du = \int_0^t 2|u-1| du$$

$$1^o) 0 \leq t \leq 1 \text{ için } s(t) = \int_0^t 2(1-u) du = -(1-u)^2 \Big|_0^t = 1 - (1-t)^2$$

$$2^o) t > 1 \text{ için } s(t) = \int_0^1 2(1-u) du + \int_1^t 2(u-1) du = -(1-u)^2 \Big|_0^1 + (u-1)^2 \Big|_1^t = (t-1)^2 + 1.$$

Soru 4) $f(x, y) = \arcsin \frac{1-x^2-y^2}{3} + \ln(y-x^2)$ ile verilen f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

(Şekil çizilecek) (13P)

$$f_1(x, y) = \arcsin \frac{1-x^2-y^2}{3};$$

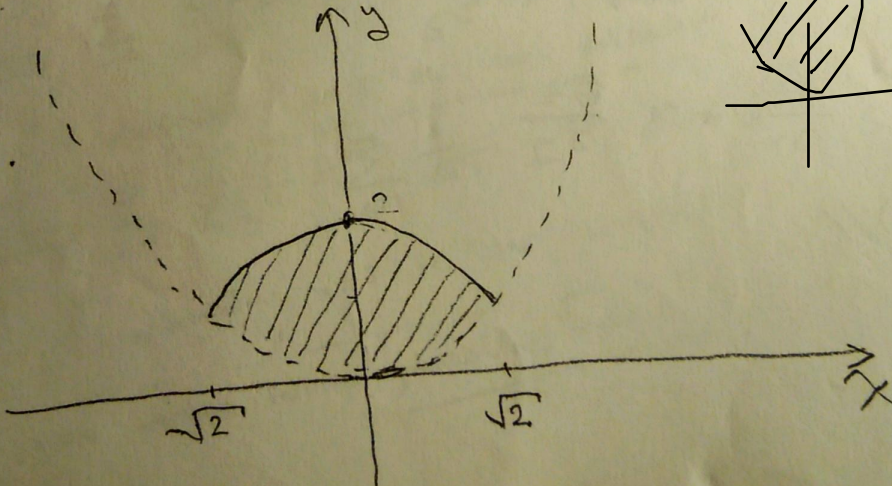
$$\forall \theta \text{ için } -1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{1-x^2-y^2}{3} \leq 1$$

$$1^o) 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \quad \checkmark$$

$$f_2(x, y) = \ln(y-x^2); \quad y-x^2 > 0 \quad 2^o) \underline{y > x^2}$$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$



Soru 5) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{xy}}{2x^2 - xy - y^2}$ limitini hesaplayınız. (12 P)

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{xy}}{(2x+y)(x-y)} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(2x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \quad (x \neq y) \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sqrt{x}}{(2x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\
 &= \frac{1}{6} // \checkmark
 \end{aligned}$$

Soru 6) $(x,y) \neq (0,0)$ için $f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ile verilen f fonksiyonunu $(0,0)$ noktasında sürekli hale getiriniz. (13 P)

$$\begin{aligned}
 \forall (x,y) \text{ için } x^4 + y^4 &\leq x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow \\
 \forall (x,y) \neq (0,0) \text{ için } 0 &\leq \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \Rightarrow \text{Sıkıştırma Kuralı gereği}
 \end{aligned}$$

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

şu,

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

funksiyonu sürekli'dir.

yaklaşık olarak hesaplayınız.

Cözüm:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3}$$

05

$$a=1 \quad b=2$$

$$f(1,2) = \sqrt{1^2+2^3} = \sqrt{9} = 3$$

05

$$\Delta x = 1.36 - 1$$

$$\Delta x = a + \Delta x - a$$

$$\Delta x = 0.36$$

$$\Delta y = 1.86 - 2$$

$$\Delta y = -0.14$$

05

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}$$

05

$$f_x(1,2) = \frac{1}{\sqrt{1+2^3}} = \frac{1}{3}$$

$$f_y(1,2) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{1+2^3}} = 2$$

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{36}{100} + 2 \cdot \frac{14}{50}$$

$$\sqrt{(1.36)^2 + (1.86)^3} = f(1.36, 1.86)$$

$$\approx f(1,2) + f_x(1,2)(0.36) + f_y(1,2)(-0.14)$$

$$\approx 3 + \frac{1}{3}(0.36) - 2(0.14)$$

$$\approx 3 + 0.12 - 0.28 \approx 2.84$$

05

eğimidir. Şekil 3.5'de, denklemi $z = f(x, y)$ olan E yüzeyine, üzerindeki $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından ve $y = y_0$ düzleminde olacak şekilde T teğeti çizilmiştir. T teğetinin, xy -düzlemi ile yaptığı açının tanjantı, yani teğetin xy -düzlemine göre eğimi, $z = f(x, y)$ fonksiyonunun, (x_0, y_0) noktasında, x değişkenine göre kısmi türevidir.

Örnek 3. Kısmi türev tanımını kullanarak, $z = x^2 + y^2$ fonksiyonunun $f_x(1,1)$ ve $f_x(0,0)$ kısmi türevlerinin olup olmadığını araştırınız.

$$z_x|_{(1,1)} = 2$$

Çözüm. $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ tanımını kullanırsak

$$f_x(1,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 1) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2 \quad \checkmark$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

elde edilir.

Örnek 4.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+y}, & (x, y) \neq (0,0) \text{ ise,} \\ 0, & (x, y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$$

$$\frac{z_x(x+y) - 1x^2}{x+y^2}$$

fonksiyonunun varsa $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{h+0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2} = 1 \quad \checkmark$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Örnek 5. $z = xe^{x+y}$ fonksiyonunun z_x ve z_y kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm.

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} + xe^{x+y} = e^{x+y}(1+x) \quad \checkmark$$

$$z_y = x \cdot 1 \cdot e^{x+y}$$

Örnek 5. $f(x, y) = e^{x+y} \sin(xy)$ fonksiyonunu için $f_{xyx} = f_{xyy}$ olduğunu gösteriniz

Çözüm. $f_{xy} = \frac{d}{dx} [e^{x+y} \sin(xy)] + y e^{x+y} \cos(xy) + \left(\frac{d}{dy} [e^{x+y} \sin(xy)] - x y e^{x+y} \sin(xy) \right)$

$$f_x = y e^{x+y} \cos(xy) = e^{x+y} \sin(xy) + y e^{x+y} \cos(xy)$$

$$f_{xy} = e^{x+y} \cos(xy) + y e^{x+y} \cos(xy) - x y e^{x+y} \sin(xy)$$

$$\begin{aligned} f_{xyx} &= e^{x+y} \cos(xy) - y e^{x+y} \sin(xy) + y e^{x+y} \cos(xy) - y^2 e^{x+y} \sin(xy) - \\ &\quad - y e^{x+y} \sin(xy) - x y e^{x+y} \sin(xy) - x y^2 e^{x+y} \cos(xy) \\ &= (1 + y - x y^2) e^{x+y} \cos(xy) - (y^2 + 2y + x y) e^{x+y} \sin(xy) \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$f_{xx} = y e^{x+y} \cos(xy) - y^2 e^{x+y} \sin(xy)$$

$$\begin{aligned} f_{xxy} &= e^{x+y} \cos(xy) + y e^{x+y} \cos(xy) - x y e^{x+y} \sin(xy) - \\ &= -2 y e^{x+y} \sin(xy) - y^2 e^{x+y} \sin(xy) - x y^2 e^{x+y} \cos(xy) \\ &= (1 + y - x y^2) e^{x+y} \cos(xy) - (y^2 + 2y + x y) e^{x+y} \sin(xy) \end{aligned}$$

olur. Buna göre $f_{xyx} = f_{xyy}$ 'dir.

c ∈ ℝ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

kısmi türev denklemine yayılma denklemi denir. Aşağıdaki fonksiyonların yayılma denklemini sağlayıp sağlamadıklarını gösteriniz.

a) $u(x, t) = e^{ax+bt}$ b) $u(x, t) = \sin(ax + bt)$

Çözüm a) $u(x, t) = e^{ax+bt} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = be^{ax+bt}$ ✓

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax+bt} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 e^{ax+bt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow be^{ax+bt} = ca^2 e^{ax+bt}$$
$$\Rightarrow c = \frac{b}{a^2}$$

bulunur. O halde, $u(x, t) = e^{ax+bt}$ fonksiyonu yayılma denklemini sağlamaktadır ve $c = \frac{b}{a^2}$ 'dir

b) $u(x, t) = \sin(ax + bt) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = b \cos(ax + bt)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \cos(ax + bt) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \sin(ax + bt)$$

o halde, $\forall x, t \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

olmadığından, $u(x, t) = \sin(ax + bt)$ fonksiyonu, yayılma denkleminin bir genel çözümü değildir. Bununla birlikte, $u(x, t) = \sin(ax + bt)$ fonksiyonu

$$ax + bt = \arctan\left(-\frac{b}{ca^2}\right)$$

koşulunun sağlanması durumlarında bir özel çözümdür.

Örnek 7. Üç boyutlu Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

şeklinde, ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemdir. Aşağıdaki fonksiyonların Laplace denklemini sağladıklarını gösteriniz.

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

b) $f(r) = \frac{1}{r}$

Çözüm a)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -4z \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -4$$

ve böylece

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 + 2 - 4 = 0$$

olur.

$$\left[\frac{1}{f} \right]' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow f(r) = f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \checkmark$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{r^3 - 3xr^2 \cdot \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{r^4 - 3x^2 r^2}{r^7}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{r^4 - 3y^2 r^2}{r^7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{r^4 - 3z^2 r^2}{r^7}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{r^4 - 3x^2 r^2}{r^7} + \frac{r^4 - 3y^2 r^2}{r^7} + \frac{r^4 - 3z^2 r^2}{r^7} \\ &= \frac{3r^4 - 3r^2(x^2 + y^2 + z^2)}{r^7} \\ &= \frac{3r^4 - 3r^4}{r^7} = 0 \end{aligned}$$

olur.

Örnek 1. $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$ fonksiyonunun x ve y değişkenleri, t 'nin $x(t) = \sin t$, $y(t) = a \cos t$

şeklindeki fonksiyonları olduğuna göre $f_t(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ değerini bulunuz.

Çözüm. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$ ve $\frac{1}{2} = a \cos \frac{\pi}{3}$, den $a = 1$ bulunur. f 'nin, zincir kuralı yardımıyla,

t 'ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} \cos t + \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} (-a \sin t) \\ &= \frac{y^2}{(x+y)^2} \cos t - \frac{ax^2}{(x+y)^2} \sin t = \frac{y^2 \cos t - ax^2 \sin t}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$f_t(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^2 \cos \frac{\pi}{3} - 1(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \sin \frac{\pi}{3}}{(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2} = \frac{1-3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{4}{(1+\sqrt{3})^2}$$

$$f_t(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} (1-3\sqrt{3})^3$$

olur.

Örnek 2. $f(x, y) = xy \sin(x+y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevlerini zincir kuralı ile bulunuz.

Çözüm. $u = xy$, $v = \sin(x+y)$ tanımlamalarıyla $f(x, y) = g(u, v) = uv$ olur. Buna göre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = vy + u \cos(x+y) = y \sin(x+y) + xy \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = vx + u \cos(x+y) = x \sin(x+y) + xy \cos(x+y)$$

Teorem 3. $D \subset \mathbb{R}^2$ 'de tanımlı bir $z = f(x, y)$ fonksiyonu verilsin. $z = f(x, y)$ 'nin belirlediği yüzey üzerindeki bir c eğrisi ile onun xy -düzlemindeki izdüşümü olan c' eğrisini gözönüne alalım. c' eğrisi üzerindeki herhangi bir noktadaki türev

$$b) \text{ ii) } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = L_1 \cdot L_2 \quad (3b)$$

$$c) \text{ iii) } \forall k \in R \text{ için } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} kf(x,y) = kL_1 \quad (3c)$$

d) iv) $g(x,y) \neq 0$ ve $L_2 \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (3d)$$

dir.

Örnek 3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin(xy)}{x}$ limitini hesaplayınız.

(Belirsizlik durumu giderilebiliyor. normal limit uygulanır)

Çözüm. $y \neq 0$ olduğundan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin(xy)}{xy}$$

yazabiliriz. $u = xy$ dönüşümü yapılsa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} y \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

elde edilir.

Örnek 4.

$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun, $(0,0)$ noktasındaki limitini, kutupsal koordinatlar yardımıyla araştırınız.

Çözüm. Kutupsal koordinatlarda $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(r,\theta) &= \frac{(r \cos \theta)^3 + (r \sin \theta)^3}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \frac{r^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1} \\ &= r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

olur. $(x,y) \rightarrow (0,0) \equiv r \rightarrow 0$ olduğundan

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r,\theta) = \lim_{r \rightarrow 0} [r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)] = 0$$

elde edilir.

Örnek 5. Sandviç (sıkıştırma) yöntemini kullanarak $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|}$ limitini bulunuz.

Çözüm. $u = \sqrt{|xy|}$ tanımlamasını yapalım ve $\cos u$ fonksiyonunu, $u = 0$ noktasında Taylor serisine açalım:

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots$$

Seri alternatif olduğundan,

$$1 - \frac{u^2}{2!} < \cos u < 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!}$$

yazabiliriz. u 'nun değeri yerine yazılırsa

$$1 - \frac{|xy|}{2} < \cos \sqrt{|xy|} < 1 - \frac{|xy|}{2} + \frac{|xy|^2}{24}$$

elde edilir. Buradan

$$4 - 2|xy| < 4 \cos \sqrt{|xy|} < 4 - 2|xy| + \frac{|xy|^2}{6}$$

$$2|xy| - \frac{|xy|^2}{6} < 4 - 4 \cos \sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

ve son olarak da

$$2 - \frac{|xy|}{6} < \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|} < 2$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan limit alınır

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(2 - \frac{|xy|}{6} \right) < \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|} < \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2$$

$$2 < \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|} < 2$$

elde edilir. O halde, sandviç özelliğinden

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|} = 2$$

$$1 - \frac{|xy|}{2!} < \cos \sqrt{|xy|} < 1 - \frac{|xy|}{2!} + \frac{|xy|^2}{24}$$

$$4 \left(1 - \frac{|xy|}{2!} \right) < 4 \cos \sqrt{|xy|} < 4 \left(1 - \frac{|xy|}{2!} + \frac{|xy|^2}{24} \right)$$

$$4 - 2|xy| < 4 \cos \sqrt{|xy|} < 4 - 2|xy| + \frac{|xy|^2}{6}$$

$$4 - 4 + 2|xy| < 4 \cos \sqrt{|xy|} < 4 - 4 + 2|xy| + \frac{|xy|^2}{6}$$

$$2 > \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|} > 2 - \frac{|xy|}{6}$$

olur.

✓ **Tanım 2 (Süreklilik).** $D \subset \mathbb{R}^2$ 'de tanımlı bir $f(x, y)$ fonksiyonu ile $(x_0, y_0) \in D$ noktası verilsin. Eğer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (4)$$

oluyorsa, f fonksiyonuna $(x_0, y_0) \in D$ noktasında süreklidir denir. Eğer, f fonksiyonu, D kümesinin her noktasında sürekli ise bu durumda f fonksiyonu D 'de süreklidir denir.

✓ **Örnek 6.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0,0) \text{ ise,} \\ 0 & , (x, y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases} \quad \text{fonksiyonunun } \mathbb{R}^2 \text{ 'de sürekli olduğunu}$$

gösteriniz.

Çözüm. $\frac{x^3}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun, $(0,0)$ dışındaki her noktada tanımlı ve sürekli olduğu açıktır. Şimdi $(0,0)$ noktasındaki sürekliliği araştıralım.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} (r \cos^3 \theta) = 0 = f(0,0)$$

o halde, fonksiyon $(0,0)$ noktasında da süreklidir.