

YÜKSEK MERTEBEDEN DİF. DENKLEM

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$(n \geq 2)$$

n. mertebeden lineer dif. denklemler

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$a_i(x) \rightarrow \text{katsayılar } (a_i(x) = a_i \in \mathbb{R})$$

(n. mertebeden sabit katsayılı dif. denklem)

Örneğin:

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = \cos x \quad \text{2. mertebeden değişken katsayılı lineer dif. denklem.}$$

$$3y''' - 4y'' + 5y = e^x \quad \text{4. mertebeden sbt. katsayılı lineer dif. denklem.}$$

n. mertebeden sbt katsayılı lineer dif. denklemler

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

2. tarafısız denklem: (Homojen denklem)

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

$$y = y_1 \text{ çözüm ise } y = C_1 \cdot y_1 \text{ de çözümü sağlar.}$$

$$y_1 \text{ ve } y_2 \text{ iki çözüm ise } y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 \text{ " "}$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \text{ n.tane çözüm ise } y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \text{ dif. denklemini sağlar.}$$

LINEER BAĞIMLILIK

$C_1, C_2, \dots, C_n$ keyfi sabitler olmak üzere,

$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$ eşitliği $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ olduğu zaman gerçekleştiriyoruz

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonlarına "lineer bağımsızdır" denir.

2. tarafsız denklemin genel çözümünün $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ olabilmesi için
yeter ve yeter şart $y_1, y_2, \dots, y_n$ çözümünün lineer bağımsız olmasıdır.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Bu determinanın sonucu $W \neq 0$

geliyorsa $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineer bağımsızdır

Eğer ;

$W = 0 \Rightarrow$ lineer bağımlıdır

a, c_2, c_3

(Wronski Determinantı)

ÖRNEK

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \sin ax \\ y_2 = \cos ax \end{array} \right\} (a \neq 0) \text{ fonksiyonları verilsin.}$$

a) fonksiyonların lineer bağımlı olup olmadıklarını araştırınız.

b) lineer bağımsız iseler, bunları çözüm kabul eden dif. denklemini kurunuz.

çözüm

a) $C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = 0$ (Burun sifonabilmesi için C_1 ve C_2 ne dimalidir.)
 $C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x = 0$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow W \neq 0 \text{ olduğundan } y_1 \text{ ve } y_2 \text{ linear bağımsızdır.}$$

b) $y = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$ genel çözümü bu dan dif. denlemi kuruyor.

$$y' = C_1 \cdot \cos x - C_2 \cdot \sin x$$

$$y'' = -C_1 \cdot \sin x - C_2 \cdot \cos x = -1 \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x) = -y$$

$$\Rightarrow y'' = -y$$

$$\boxed{y'' + y = 0}$$

NURAN GÜZEL DERS
NOTU

Teorem

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \text{ denkleminin çözümleri}$$

$$\boxed{y = e^{rx}}$$
 şeklindedir.

$$\left. \begin{array}{l} y = e^{rx} \\ y' = r \cdot e^{rx} \\ y'' = r^2 \cdot e^{rx} \\ y''' = r^3 \cdot e^{rx} \\ \vdots \\ y^{(n)} = r^n \cdot e^{rx} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + a_2 r^{n-2} e^{rx} + \dots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} = 0 \\ e^{rx} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = 0 \\ a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \end{array}$$

$$\text{Karakteristik Denklem (Polinom)}$$

$$n. \text{ tane kökü } r_1, r_2, \dots, r_n$$

$$r_1 \rightarrow y_1 = e^{r_1 x}$$

$$r_2 \rightarrow y_2 = e^{r_2 x}$$

$$r_3 \rightarrow y_3 = e^{r_3 x}$$

$$\vdots$$

$$r_n \rightarrow y_n = e^{r_n x}$$

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \dots + C_n \cdot y_n$$

ÖRNEK

$y''' - 3y'' + 2y' = 0$ dif. denklemini çözünüz.

Çözüm

(3. mertebeden sbt katsayılı denklem)

$$\left. \begin{array}{l} y = e^{rx} \\ y' = r \cdot e^{rx} \\ y'' = r^2 \cdot e^{rx} \\ y''' = r^3 \cdot e^{rx} \end{array} \right\} \begin{array}{l} r^3 e^{rx} - 3 \cdot r^2 e^{rx} + 2 \cdot r e^{rx} = 0 \\ e^{rx} (r^3 - 3r^2 + 2r) = 0 \\ \underbrace{\phantom{e^{rx} (r^3 - 3r^2 + 2r)}}_{r \cdot (r^2 - 3r + 2)} = 0 \end{array}$$

$$r_1 = 0 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 2$$

$$y_1 = e^{0x} = 1 \quad y_2 = e^{1x} = e^x \quad y_3 = e^{2x} = e^{2x}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2 \cdot e^{2x} \\ 0 & e^x & 4 \cdot e^{2x} \end{vmatrix} = 2 \cdot e^{3x} \neq 0$$

Lineer bağımsızdır.

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}} \quad \text{Genel Çözüm.}$$

ÖRNEK

$y'' - 5y' + 6y = 0$ dif. denklemin genel çözümü bulunuz.

NURAN GÜZEL DERS NOTU

Çözüm

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$r_1 = 2 \Rightarrow y_1 = e^{2x}$$

$$r_2 = 3 \Rightarrow y_2 = e^{3x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}} \quad \text{Genel Çözüm.}$$

NOT:

Karotistik polinom
(denklemin) kökleri birbirinden farklı ise
çözümün hepsi lineer bağımsızdır.

$$\frac{d^2k}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dk}{dx} \right) = 0 \rightarrow \frac{dk}{dx} = C_1$$

$$\int dk = \int C_1 dx$$

$$k(x) = C_1 x + C_2$$

$$y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{rx}$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{C_1 x \cdot e^{rx}}_{y_1} + \underbrace{C_2 \cdot e^{rx}}_{y_2}$$

Örnek

Karakteristik polinomun kökleri eşit kök durumunda ise genel çözümü e^{rx} ifadesiyle beraber, eşit kök sayısından 1. derece küçük polinomun genel zettidir.

Örneğe geri dönersek;

$$r_1 = r_2 = 1 \quad (2 \text{ kat})$$

$$r_3 = -2$$

$$y = e^x \cdot (C_1 x + C_2) + C_3 \cdot e^{-2x}$$

$$y = C_1 x \cdot e^x + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot e^{-2x}$$

ÖRNEK

$y'' = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz

Çözüm

$$r^2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \end{matrix} \quad (2 \text{ kat})$$

$$y = e^{0x} (C_1 x + C_2)$$

$$y = C_1 x + C_2$$

ÖRNEK $y''' - 3y' + 2y = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.ÇÖZÜM

$$r^3 - 3r + 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = -2 \end{array} \right\} (r-1)^2 (r+2) = 0.$$

$$\Rightarrow y_1 = e^x \quad y_2 = e^x \quad y_3 = e^{-2x}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^x & e^{-2x} \\ e^x & e^x & -2e^{-2x} \\ e^x & e^x & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Linear bağımlı}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} \quad \text{bu bir genel çözüm olmazdı.}$$

$$ay'' + by' + cy = 0 *$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} = r$$

$$y = k(x) \cdot e^{rx}$$

$$y = k' e^{rx} + k \cdot r \cdot e^{rx}$$

$$y'' = k'' e^{rx} + r e^{rx} k' + k' \cdot r e^{rx} + k \cdot r^2 e^{rx}$$

$$k''(k' e^{rx} + 2 \cdot r \cdot k' e^{rx} + k \cdot r^2 e^{rx}) + b(k' e^{rx} + k \cdot r \cdot e^{rx}) + c(k e^{rx}) = 0$$

$$a \cdot k'' + (2a \cdot r + b) \cdot k' + (a \cdot r^2 + br + c) \cdot k = 0$$

$$\underbrace{\quad}_{=0} \quad \underbrace{\quad}_{=0}$$

$$\Rightarrow a \cdot k'' = 0 \rightarrow a \neq 0$$

$$k'' = 0$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$a.r^2 + br + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} = r$$

$$y = k(x) \cdot e^{rx}$$

$$y' = k' \cdot e^{rx} + k \cdot r \cdot e^{rx}$$

$$y'' = k'' \cdot e^{rx} + k' \cdot r \cdot e^{rx} + k' \cdot r \cdot e^{rx} + r^2 \cdot e^{rx} \cdot k$$

$$a(k'' \cdot e^{rx} + 2k' \cdot r \cdot e^{rx} + k \cdot r^2 \cdot e^{rx}) + b(k' \cdot e^{rx} + k \cdot r \cdot e^{rx}) + c \cdot k \cdot e^{rx} = 0$$

$$a \cdot k'' + (2ar + b) \cdot k' + (ar^2 + br + c) \cdot k = 0$$

$$\underbrace{\quad}_{=0} \quad \underbrace{\quad}_{=0}$$

$$a \cdot k'' = 0 \rightarrow a \neq 0$$

$$k'' = 0$$

$$\frac{d^2 k}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dk}{dx} \right) = 0 \rightarrow \frac{dk}{dx} = C_1$$

$$\int dk = \int C_1 \cdot dx$$

$$k(x) = C_1 x + C_2$$

$$y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{rx} \Rightarrow$$

$$y = \overbrace{C_1 x \cdot e^{rx}}^{y_1} + \overbrace{C_2 \cdot e^{rx}}^{y_2}$$

ÖRNEK

$y^{IV} - 4y'' = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left. \begin{array}{l} r^4 - 4r^2 = 0 \\ r^2(r^2 - 4) = 0 \\ r^2(r-2)(r+2) = 0 \\ r_1 = r_2 = 0 \\ r_3 = 2 \\ r_4 = -2 \end{array} \right\} y = e^{0x}(C_1x + C_2) + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$$

ÖRNEK:

$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$$

$$(r+1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = -1 \text{ (3 kat)}$$

$$y = e^{-x}(C_1x^2 + C_2x + C_3)$$

NURAN GÜZEL DERS NOTU

ÖRNEK

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$$

ÇÖZÜM

$$r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$$

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = r_3 = 2 \text{ (2 kat)}$$

$$y = C_1e^x + e^{2x}(C_2x + C_3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^x & e^{2x} & e^{2x} & & & \\ e^x & 2e^{2x} & 2e^{2x} & & & \\ e^x & 4e^{2x} & 4e^{2x} & -5 & 8 & -4 \\ & & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & & & 1 & 4 & -4 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Bütünleşik

$$(r^2 - 4r + 4) = (r-2)^2$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \sqrt{-1} = i$$

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$y = K_1 \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} + K_2 \cdot e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$e^{\pm i\alpha x} = \cos \alpha x \pm i \sin \alpha x$$

$$y = K_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} + K_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

$$y = K_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} + K_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

$$y = e^{\alpha x} [K_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + K_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)]$$

$$y = e^{\alpha x} \left[\underbrace{(K_1 + K_2)}_{C_1} \cos \beta x + i \underbrace{(K_1 - K_2)}_{C_2} \sin \beta x \right]$$

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

ÖRNEK

$$y'' + 2y' + 10y = 0 \text{ dif. denklemini çözünüz.}$$

Çözüm

$$r^2 + 2r + 10 = 0 \quad \text{(karakteristik denkleminiz)}$$

NURAN GÜZEL DERS NOTU

$$\Delta = -36 < 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36(-1)}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2}$$

$$r_{1,2} = -1 \pm 3i$$

$$r_1 = -1 + 3i$$

$$r_2 = -1 - 3i$$

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

ÖRNEK

$y'' + 4y = 0$ dif. denklemini çözünüz.

Çözüm

$$r^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -16 < 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \pm 2i$$

$$y = e^{0x} \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

ÖRNEK

$y'' + 4y' + 5y = 0$ dif. denklemini çözünüz.

Çözüm

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i$$

$$y = e^{-2x} \cdot (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

3. Sonuç

Karakteristik denklemin kökleri katlı kompleks kök ise $\cos \beta x$ ve $\sin \beta x$ 'in
garpını dan polinomların dereceleri, katlılık sayısından 1 ebirdir.

ÖRNEK

$$y'' + 8y' + 16y = 0 \text{ dif. denklemini çözünüz.}$$

Gözüm

$$r^4 + 8r^2 + 16 = 0$$

$$(r^2 + 4)^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm 2i \text{ (2 kat)}$$

$$y = (C_1 x + C_2) \cdot \cos 2x + (C_3 x + C_4) \cdot \sin 2x$$

ÖRNEKLER

$$1) \underbrace{r_1 = 3i, r_2 = -3i}_{r_{1,2} = \pm 3i}, r_3 = 5, r_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}, r_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3 e^{5x} + C_4 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} + C_5 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

$$2) r_1 = 2 + \frac{1}{2}i, r_2 = 2 - \frac{1}{2}i, r_3 = r_4 = r_5 = -1, r_6 = \sqrt{3}$$

$$y = e^{2x} \cdot (C_1 \cos \frac{1}{2}x + C_2 \sin \frac{1}{2}x) + e^{-x} \cdot (C_3 x^2 + C_4 x + C_5) + C_6 e^{\sqrt{3}x}$$

$$3) \underbrace{r_1 = r_2 = r_3 = 2 + i}_{r_{1,2,3} = 2 + i}, \underbrace{r_4 = r_5 = r_6 = 2 - i}_{r_{4,5,6} = 2 - i}, r_7 = 3 - 2i$$

$$y = e^{2x} \cdot [(C_1 x^2 + C_2 x + C_3) \cos x + (C_4 x^2 + C_5 x + C_6) \sin x] + e^{-3x} (C_7 x + C_8)$$

ÖRNEK

$y'' - y' - 2y = 0$ dif. denkleminin 2 ayrı çözümü olduğunu gösteriniz ve G. çözümü yazınız.

Çözüm

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} r - 2 = 0 \\ r + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r_1 = -1 \Rightarrow y_1 = e^{-x} \\ r_2 = 2 \Rightarrow y_2 = e^{2x} \end{array}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^x + e^x = 3e^x \neq 0$$

Lineer Bağımsızdır.

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{2x}} \quad \text{Genel Çözüm.}$$

2. TARAFLI DENKLEM

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x) \quad (\text{yani } f(x) \neq 0)$$

Diyecek ki,

$ay'' + by' + cy = f(x)$ şeklinde bir dif. denklem vermiş olsun.

NURAN GÜZEL DERS NOTU

$$y = y_h + y_p \rightarrow \begin{array}{l} \text{2 taraftan gelen} \\ \text{özel çözüm} \end{array}$$

2 taraflı denklemlerden
çıkan genel çözümdür.

$$\left. \begin{array}{l} y = y_h + y_p \\ y' = y'_h + y'_p \\ y'' = y''_h + y''_p \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot (y''_h + y''_p) + b \cdot (y'_h + y'_p) + c \cdot (y_h + y_p) = f(x) \\ a \cdot y''_h + b y'_h + c \cdot y_h + a y''_p + b y'_p + c \cdot y_p = f(x) \\ \underbrace{a \cdot y''_h + b y'_h + c \cdot y_h}_0 + a y''_p + b y'_p + c \cdot y_p = f(x) \end{array}$$