

BELİRSİZLİK VE L'HOPİTAL KURALI

0/0 Belirsiz Şekli

$f(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonlarının ikisi de $x = a$ 'da sıfırsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$x = a$ yazılarak bulunamaz. Bunu yazmak 0/0 verir ki bu da **belirsiz form** olur.

TEOREM 6 L'Hôpital Kuralı (Birinci Şekil)

$f(a) = g(a) = 0$ olduğunu, $f'(a)$ ve $g'(a)$ 'nın var olduğunu ve $g'(a) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

olur.

TEOREM 7 L'Hôpital Kuralı (Daha Kuvvetli Şekil)

$f(a) = g(a) = 0$ olduğunu, f ile g 'nin a noktasını içeren bir I açık aralığında türevlenebilir olduklarını varsayın. Ayrıca $x \neq a$ ise, I 'da $g'(x) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda, sağdaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2} - 1/2}{2x}$$

Hala $\frac{0}{0}$; tekrar türev alın.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8}$$

$\frac{0}{0}$ değil; limit bulundu.

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

Hala $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x}$$

Hala $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

$\frac{0}{0}$ değil; limit bulundu. ■

L'Hôpital Kuralını Kullanmak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limitini l'Hôpital kuralı ile bulmak için, $x = a$ da $0/0$ formunu elde ettiğiniz sürece f ve g 'nin türevlerini almaya devam edin. Fakat, bu türevlerden biri veya öteki $x = a$ da sıfırdan farklı olduğunda türev almayı durdururuz. Payın veya paydanın sıfırdan farklı sonlu bir limitinin olması durumunda l'Hôpital Kuralı uygulanamaz.

ÖRNEK

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} & \quad \frac{0}{0} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} & = \frac{0}{1} = 0 \quad \frac{0}{0} \text{ değil; limit bulundu} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} & \quad \frac{0}{0} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2x} & = \infty \quad x > 0 \text{ için pozitif} \\ \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} & \quad \frac{0}{0} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2x} & = -\infty \quad x < 0 \text{ için negatif} \end{aligned}$$

$\infty/\infty, \infty \cdot 0, \infty - \infty$ Belirsiz Şekilleri

Bazen, $x = a$ yazarak $x \rightarrow a$ iken limit hesaplamaya çalıştığımızda, $0/0$ yerine ∞/∞ , $\infty \cdot 0$ veya $\infty - \infty$ gibi ne olduğu belirsiz ifadeler elde ederiz. Önce ∞/∞ formunu ele alıyoruz.

Daha ileri seviyede kitaplarda l'Hôpital Kuralının $0/0$ 'a olduğu gibi ∞/∞ 'a uygulandığı da ispatlanmaktadır. $x \rightarrow a$ iken $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ve $g(x) \rightarrow \pm\infty$ ise, sağdaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir. $x \rightarrow a$ notasyonunda a sonlu veya sonsuz olabilir. Ayrıca, $x \rightarrow a$ ifadesi $x \rightarrow a^+$ veya $x \rightarrow a^-$ tek taraflı limitleri ile değiştirilebilir.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x}$$

Pay ve payda $x = \pi/2$ 'de süreksizdir, bu yüzden burada tek taraflı limitleri inceleriz. l'Hôpital Kuralını uygulamak için, bir uç noktası $x = \pi/2$ olan herhangi bir I açık aralığı seçebiliriz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} & \quad \text{soldan } \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sin x = 1 \end{aligned}$$

Bir belirsiz şekil olarak $(-\infty)/(-\infty)$ ile sağdan türevde 1 dir. Bu nedenle, iki taraflı limit 1'e eşittir.

Örnek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4x}{6x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

ÖRNEK

$\infty \cdot 0$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \quad \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \sin h \right) \quad h = 1/x.$$

$$= 1$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \sec^2\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sec^2\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^2 0 = 1$$

$\infty - \infty$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

Çözüm $x \rightarrow 0^+$ ise $\sin x \rightarrow 0^+$ dir ve

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \rightarrow \infty - \infty$$

olur. Benzer şekilde $x \rightarrow 0^-$ ise $\sin x \rightarrow 0^-$ dir ve

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \rightarrow -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty$$

olur. İki şekilde limitte ne olduğunu göstermez. Limiti bulmak için, önce kesirleri birleştiririz:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \quad \text{ortak payda } x \sin x \text{ dir.}$$

Sonra, sonuca l'Hôpital Kuralını uyguluyoruz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} && \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} && \text{Hala } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 11x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cos(7x)}{11 \sec^2(11x)} = \frac{7 \cdot 1}{11 \cdot 1} = \frac{7}{11}$$

ÖRNEK $\infty - \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x} \right) \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x + \sqrt{x^2 + x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - (x^2 + x)}{x + \sqrt{x^2 + x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x + \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$