

BİLEŞİK DAĞILIMLAR

Aynı bir örnek uzayda, 1'den fazla raslantı değişkeni tanımlanabilir. Başka bir deyişle, aynı bir örnek uzayın noktalarına (*elémentlarına*) 1'den fazla raslantı değişkeni bağlanabilir.

Örnek 5.1)

Bir çift tavla zarı atılıyor. Gelen sayıların toplamı X rasgele değişkeni ve gelen sayılardan küçüğü veya eşiti Y rasgele değişkeni olarak tanımlanıyor. X, Y rasgele değişkenlerinin bileşik dağılımını tablo'layınız.

Yanıt :

Önce, örnek uzayın oluşumu ve olasılıklar için (Örnek 1.5 ve Örnek 3.16)'ya bakınız.

X	Y	1	2	3	4	5	6	$f_x(x)$
2		1/36	0	0	0	0	0	$f_x(2) = 1/36$
3		2/36	0	0	0	0	0	$f_x(3) = 2/36$
4		2/36	1/36	0	0	0	0	$f_x(4) = 3/36$
5		2/36	2/36	0	0	0	0	$f_x(5) = 4/36$
6		2/36	2/36	1/36	0	0	0	$f_x(6) = 5/36$
7		2/36	2/36	2/36	0	0	0	$f_x(7) = 6/36$
8		0	2/36	2/36	1/36	0	0	$f_x(8) = 5/36$
9		0	0	2/36	2/36	0	0	$f_x(9) = 4/36$
10		0	0	0	2/36	1/36	0	$f_x(10) = 3/36$
11		0	0	0	0	2/36	0	$f_x(11) = 2/36$
12		0	0	0	0	0	1/36	$f_x(12) = 1/36$
$f_y(y)$		$f_y(1)$	$f_y(2)$	$f_y(3)$	$f_y(4)$	$f_y(5)$	$f_y(6)$	$\sum f_x = 1$
		11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	$\sum f_y = 1$

Açıklama :

X rasgele değişkeninin x ve Y rasgele değişkeninin y değerine karşılık (x, y) hücresindeki olasılık $f(x, y)$ ile gösterilecektir.

Meselâ, $x=7$ satırının oluşumu :

$x=7$ değerini örnek uzayın $(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)$ noktalarında alır.

$(1, 6), (6, 1)$ noktalarında $y=1$ olduğundan : $f(7, 1) = 2/36$,

$(2, 5), (5, 2)$ noktalarında $y=2$ olduğundan : $f(7, 2) = 2/36$,

$(3, 4), (4, 3)$ noktalarında $y=3$ olduğundan : $f(7, 3) = 2/36$,

$x=7$ satırının diğer hücrelerindeki olasılıklar 0 (sıfır)

dır. Bu satırın hücrelerindeki olasılıkların toplamı

$$f_x(7) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36}$$

dır ve marginal olarak, tablo'nun son sütununa yazılmıştır.

Sütunların toplamı da f_Y marginal değerleri olarak, tablo'nun son satırına yazılmıştır. Meselâ, $y=4$ sütununun hücrelerindeki olasılıkların toplamı $f_Y(4) = 5/36$ dır.

Diğer satır veya sütunların oluşturulmasında da aynı yöntem izlenir.

Marginal dağılımlar :

X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu f_X ve Y rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu f_Y marginal dağılımlar adını alırlar. f_X Marginal dağılımı tablo'nun son sütununu ve f_Y marginal dağılımı tablo'nun son satırını oluşturur.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

dir.

Örnek 5.2)

Bir firmanın iki otomobil galerisi var. Bunların her biri belirli bir zaman aralığında ve birbirinden bağımsız olarak 0, 1, 2, 3 otomobil satabiliyor.

1 numaralı galerinin

0	otomobil satma olasılığı	0.10 ,
1	otomobil satma olasılığı	0.40 ,
2	otomobil satma olasılığı	0.20 ,
3	otomobil satma olasılığı	0.30 ;

2 numaralı galerinin

0	otomobil satma olasılığı	0.10 ,
1	otomobil satma olasılığı	0.20 ,
2	otomobil satma olasılığı	0.50 ,
3	otomobil satma olasılığı	0.20

dir.

- 1) Galerilerin satışlarının, bileşik olasılık fonksiyonunu tablolarınız.
- 2) Firmanın sattığı otomobillerin dağılımını tablolarınız.

Yanıt :

1 numaralı galerinin sattığı otomobillerin sayısı X , 2 numaralı galerinin sattığı otomobillerin sayısı Y rasgele değişkeni olarak tanımlansın. X ve Y rasgele değişkenleri, birbirinden bağımsız olduklarından

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (1^\circ)$$

dir. Marginal olasılık fonksiyonları

X	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.10	0.40	0.20	0.30

Y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	0.10	0.20	0.50	0.20

olduğundan, (1°) eşitliği'ne göre aşağıdaki bileşik dağılım tablosu oluşur:

Y	0	1	2	3	$f_X(x)$
X					
0	0.01	0.02	0.05	0.02	0.10
1	0.04	0.08	0.20	0.08	0.40
2	0.02	0.04	0.10	0.04	0.20
3	0.03	0.06	0.15	0.06	0.30
$f_Y(y)$	0.10	0.20	0.50	0.20	$\sum f_X = \sum f_Y = 1$

2) Firmanın sattığı otomobillerin sayısı Z rasgele değişkeni olarak tanımlansın. Z 'nin değerler kümesi $R_Z = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ dir. Olasılıklar, bileşik dağılım tablosundan elde edilir.

$$f_z(0) = f(0, 0) = 0.01,$$

$$f_z(1) = f(0, 1) + f(1, 0) = 0.02 + 0.04 = 0.06,$$

$$f_z(2) = f(1, 1) + f(0, 2) + f(2, 0) = 0.08 + 0.05 + 0.02 = 0.15,$$

$$f_z(3) = f(0, 3) + f(3, 0) + f(1, 2) + f(2, 1) = 0.02 + 0.03 + 0.20 + 0.04 = 0.29$$

$$f_z(4) = f(2, 2) + f(1, 3) + f(3, 1) = 0.10 + 0.08 + 0.06 = 0.24,$$

$$f_z(5) = f(2, 3) + f(3, 2) = 0.04 + 0.15 = 0.19,$$

$$f_z(6) = f(3, 3) = 0.06$$

dir. Z rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunun tablo şeklindeki gösterimi aşağıdadır :

Z	0	1	2	3	4	5	6
$f_z(z)$	0.01	0.06	0.15	0.29	0.24	0.19	0.06

Tanım 5.1)

Kesikli, bileşik olasılık fonksiyonu

Kesikli X rasgele değişkeninin tanım kümesi $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$,
 Y rasgele değişkeninin tanım kümesi $R_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$
 olsun.

$$1) \quad f(x_i, y_j) \geq 0, \quad \forall (x_i, y_j) \in [R_X \cup R_Y] \text{ için ;}$$

$$2) \quad \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1, \quad \begin{matrix} \text{bütün } i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \text{ ler için ;}$$

$$3) \quad f(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \notin [R_X \cup R_Y] \text{ için .}$$

koşullarını sağlayan f fonksiyonu, kesikli X, Y rasgele değişkenlerinin **bileşik olasılık fonksiyonu** olarak kabul edilebilir.

Burada

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

dir.

Tanım 5.2)**Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu**

Sürekli X, Y rasgele değişkenlerinin tanım bölgesi D olsun.

- 1) $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in D$ için ,
- 2) $\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = 1$,
- 3) $f(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \notin D$ için

koşullarını sağlayan $f(x, y)$ fonksiyonu X, Y rasgele değişkenlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak kabul edilebilir.

Örnek 5.3)

$$f(x, y) = \begin{cases} mx\sqrt{y} & ; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 \text{ için} \\ 0 & ; \text{diğer } x\text{'ler için} \end{cases}$$

fonksiyonu gözönüne alıyoruz. f nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için m parametresi hangi değeri almalıdır?

Yanıt :

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = 1 \text{ koşulu sağlanmalıdır.}$$

$$m \int_0^2 x dx \int_0^4 \sqrt{y} dy = 1, \quad m \int_0^2 x dx \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^4 = \frac{16m}{3} \int_0^2 x dx = \frac{32m}{3} = 1,$$

$m = \frac{3}{32}$ olmalıdır. m 'nin bu değeri için $f(x, y) \geq 0$ koşulu da sağlanır.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{32} x\sqrt{y} & ; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 \text{ için} \\ 0 & ; \text{diğer } x\text{'ler için} \end{cases}$$

bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak kabul edilebilir.

DAĞILIM FONKSİYONU

Kesikli rasgele değişkenler için

$$F(x, y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u, v)$$

Sürekli rasgele değişkenler için

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

dir.

Bu tanımdan, F dağılım fonksiyonu ile f olasılık yoğunluk fonksiyonu arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilebilir:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^y f(x, v) dv, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^x f(u, y) du$$

F dağılım fonksiyonu, aşağıdaki bağıntıları sağlar:

- 1) $F(x, y) \geq 0$ ve azalmayan bir fonksiyondur.
- 2) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$ ve $F(+\infty, +\infty) = 1$ dir.
- 3) $P(X \leq x, y_1 < Y \leq y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1)$,
 $P(x_1 < x \leq x_2, Y \leq y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$,
 $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$

Yukarıdaki özellikler, kesikli veya sürekli rasgele değişkenler için geçerlidir. Burada, sürekli rasgele değişkenler için $<$ yerine $\leq$ kullanılabilir.

Örnek 5.4)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{32} x \sqrt{y}, & 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4 \text{ için} \\ 0, & \text{diğer } x \text{ ler için} \end{cases}$$

bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu veriliyor (Örnek 5.3'e bakınız).

- 1) $F(x, y)$ dağılım fonksiyonunu bulunuz.
- 2) Yukarıdaki (3) özeliğine dayanarak
 $P(x \leq 1/2, 1 \leq y \leq 2)$, $P(1/4 \leq x \leq 3/2, y \leq 2)$,
 $P(1/5 \leq x \leq 7/5, 1/4 \leq y \leq 4)$

hesaplayınız.

Yanıt :

Tanım 5.3'den

1)

$$F(x, y) = \int_0^y \int_0^x f(u, v) du dv$$

dir.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{3}{32} \int_0^y \int_0^x u \sqrt{v} du dv = \frac{3}{32} \int_0^y \sqrt{v} dv \int_0^x u du \\ &= \frac{3}{32} \int_0^y \sqrt{v} dv \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^x = \frac{3}{32} \cdot \frac{x^2}{2} \int_0^y \sqrt{v} dv \\ &= \frac{3}{32} \cdot \frac{x^2}{2} \left[\frac{2}{3} v^{3/2} \right]_0^y = \frac{1}{32} x^2 y^{3/2} \end{aligned}$$

dir.

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0, \quad y < 0 \quad \text{için} \\ \frac{1}{32} x^2 y^{3/2} & ; \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4 \quad \text{için} \\ 1 & ; \quad x > 2, \quad y > 4 \quad \text{için} \end{cases}$$

olur.

2) 205. Sayfadaki (3) eşitliklerinden yararlanılır.

$$P(x \leq 1/2, 1 \leq y \leq 2) = F(1/2, 2) - F(1/2, 1)$$

dir. Sayısal değerler yerlerine yerleştirilirse

$$P(x \leq 1/2, 1 \leq y \leq 2) = \frac{1}{32} \left(\frac{1}{2}\right)^2 2^{3/2} - \frac{1}{32} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1^{3/2} \approx \% 1$$

$$P(1/4 \leq x \leq 3/2, y \leq 2) = F\left(\frac{3}{2}, 2\right) - F\left(\frac{1}{4}, 2\right) \approx \% 19$$

$$P\left(\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{7}{5}, \frac{1}{4} \leq y \leq 4\right) = F\left(\frac{7}{5}, 4\right) - F\left(\frac{1}{5}, 4\right) - [F\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{4}\right) - F\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)] \approx \% 47$$

dir.

MARGİNAL OLASILIK FONKSİYONLARI

Tanım 5.4)

X , Y rasgele değişkenlerinin marginal olasılık fonksiyonları

X , Y kesikli ise $f_X(x) = \sum_j f(x_i, y_j)$ $f_Y(y) = \sum_i f(x_i, y_j)$	X , Y sürekli ise $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$
--	--

dir.

MARGİNAL DAĞILIM FONKSİYONLARI

Kesikli veya sürekli X , Y rasgele değişkenlerinin marginal dağılım fonksiyonları

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F(x, +\infty),$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F(+\infty, y)$$

dir.

Örnek 5.5)

$$f(x, y) = \begin{cases} m(x + y), & 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } (x, y) \text{ ler için} \end{cases}$$

bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu veriliyor.

- 1) m parametresini belirtiniz.
- 2) $f_X(x)$, $f_Y(y)$ marginal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.
- 3) F dağılım fonksiyonunu bulunuz.
- 4) $F_X(x)$, $F_Y(y)$ marginal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.
- 5) Dağılım fonksiyonundan yararlanarak $P(x \leq 1, y \geq 2)$ olasılığını hesaplayınız.

Yanıt :

1) $m \geq 0$ için $f(x, y) \geq 0$ koşulu sağlanır.

$$\int_0^2 \int_1^4 m(x+y) dx dy = 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$\begin{aligned} m \int_0^2 dx \int_1^4 (x+y) dy &= m \int_0^2 dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^4 = m \int_0^2 \left(3x + \frac{15}{2} \right) dx \\ &= m \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{15x}{2} \right]_0^2 = m \cdot 21 = 1, \quad m = \frac{1}{21} \end{aligned}$$

olmalıdır.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{21} (x+y) & 0 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 4 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } (x, y) \text{ ler için} \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonudur

2) Marginal olasılık yoğunluk fonksiyonları .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{21} \int_1^4 (x+y) dy = \frac{1}{21} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^4$$

$$f_X(x) = \frac{1}{14} (2x+5)$$

dir.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{21} \int_0^2 (x+y) dx = \frac{1}{21} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^2$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{21} (y+1)$$

dir.

$$\begin{aligned}
 3) \quad F(x, y) &= \int_0^x \int_1^y f(u, v) \, du \, dv = \frac{1}{21} \int_0^x \int_1^y (u + v) \, du \, dv \\
 &= \frac{1}{21} \int_0^x du \left[uv + \frac{v^2}{2} \right]_1^y = \frac{1}{21} \int_0^x \left(uy + \frac{y^2}{2} - u - \frac{1}{2} \right) du \\
 &= \frac{1}{21} \left[\frac{u^2 y}{2} + \frac{y^2 u}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{2} \right]_0^x, \\
 &= \frac{1}{42} (x^2 y + y^2 x - x^2 - x)
 \end{aligned}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0, y < 1 \text{ için} \\ \frac{1}{42} (x^2 y + y^2 x - x^2 - x), & 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4 \text{ için} \\ 1 & x > 2, y > 4 \text{ için} \end{cases}$$

dir.

4) Marginal dağılım fonksiyonları.

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= F(x, +\infty) = F(x, 4) = \frac{1}{42} (4x^2 + 16x - x^2 - x) \\
 &= \frac{1}{14} (x^2 + 5x)
 \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ için} \\ \frac{1}{14} (x^2 + 5x) & 0 \leq x \leq 2 \text{ için} \\ 1 & x > 2 \text{ için} \end{cases}$$

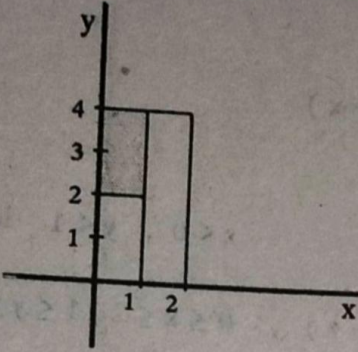
dir.

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= F(+\infty, y) = F(2, y) = \frac{1}{42} (4y + 2y^2 - 4 - 2) \\
 &= \frac{1}{21} (y^2 + 2y - 3)
 \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \text{ için} \\ \frac{1}{21}(y^2 + 2y - 3) & 1 \leq y \leq 4 \text{ için} \\ 1 & y > 4 \text{ için} \end{cases}$$

dir.

5)



$(x \leq 1, y \geq 2)$ bölgesi,

$(0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 4)$

olarak ifade edilebilir (*taralı bölge*).

205. Sayfada'ki (3) bağıntısından

$$P(0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 4) =$$

$$F(1, 4) - F(0, 4) - F(1, 2) + F(0, 2)$$

dir. Veriler, dağılım fonksiyonunda

yerlerine yerleştirilirse

$$P(x \leq 1, y \geq 2) = \frac{9}{21} - 0 - \frac{2}{21} + 0 \approx \% 33$$

bulunur.

KOŞULLU OLASILIK

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad [P(A) \neq 0]$$

olduğunu hatırlatalım.

X, Y rasgele değişkenlerinin bileşik dağılımında X'in koşullu olarak kabul edilen aralığı A ile gösterilirse

$$P(Y \leq y | A) = \frac{P(Y \leq y, A)}{P(A)}, \quad [P(A) \neq 0]$$

olur.

Burada A aralığı $A=(X \leq x)$, $A=(x_1 \leq X \leq x_2)$, $A=(X \geq x)$ veya $A=(X=x)$ olabilir.

Benzer şekilde, eğer Y rasgele değişkeninin bir B aralığı koşul olarak kabul edilmiş ise

$$P(X \leq x | B) = \frac{P(X \leq x, B)}{P(B)}, \quad [P(B) \neq 0]$$

dır.

Burada B aralığı $B=(Y \leq y)$, $B=(y_1 \leq Y \leq y_2)$, $B=(Y \geq y)$ veya $B=(Y=y)$ olabilir.

$A=(X \leq x)$ için:

$$F(y | X \leq x) = \frac{F(y, X \leq x)}{F(X \leq x)} = \frac{F(x, y)}{F_X(x)}$$

y'ye göre türev alınır

(1°)

$$f(y | X \leq x) = \frac{\partial F / \partial y}{F_X(x)}$$

dir. Benzer şekilde,

$B=(Y \leq y)$ için:

$$F(x | Y \leq y) = \frac{F(x, Y \leq y)}{F(Y \leq y)} = \frac{F(x, y)}{F_Y(y)} ;$$

x'e göre türev alınır

(2°)

$$f(x | Y \leq y) = \frac{\partial F / \partial x}{F_Y(y)}$$

olur.

X, Y rasgele değişkenleri sürekli ise

$A = (X = x)$ için :

$$F(y | X=x) = \frac{\int_{-\infty}^y f(x, v) dv}{f_X(x)} ;$$

(3°)

y 'ye göre türev alınırsa

$$f(y | X=x) = \frac{f(y, X=x)}{f_X(x)} = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

dir. Benzer şekilde ,

$B = (Y = y)$ için :

$$F(x | Y=y) = \frac{\int_{-\infty}^x f(u, y) du}{f_Y(y)} ;$$

x 'e göre türev alınırsa

(4°)

$$f(x | Y=y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

olur.

Örnek 5.6)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{32} x \sqrt{y} & , \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4 \text{ için} \\ 0 & , \quad \text{diğer } (x, y) \text{ ler için} \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu veriliyor.

- 1) $F(x | Y \leq y)$, $f(x | Y \leq y)$ 2) $F(y | X \leq x)$, $f(y | X \leq x)$
 3) $F(x | Y = y)$, $f(x | Y = y)$ 4) $F(y | X = x)$, $f(y | X = x)$
 bulunuz.

Yanıt :

206. Sayfa'da $F(x, y) = \frac{1}{32} x^2 y^{3/2}$ olarak bulunduğundan

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{16} x y^{3/2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{3}{64} x^2 y^{1/2}$$

dir.

$$1) \quad F_Y(y) = F(+\infty, y) = F(2, y) = \frac{1}{32} 4 \cdot y^{3/2} = \frac{1}{8} y^{3/2}$$

$$F(x | Y \leq y) = \frac{F(x, y)}{F_Y(y)} = \frac{\frac{1}{32} x^2 y^{3/2}}{\frac{1}{8} y^{3/2}} = \boxed{\frac{1}{4} x^2}$$

$$f(x | Y \leq y) = \frac{\partial F / \partial x}{F_Y(y)} = \frac{\frac{1}{16} x y^{3/2}}{\frac{1}{8} y^{3/2}} = \boxed{\frac{1}{2} x}$$

$$2) \quad F_X(x) = F(x, +\infty) = F(x, 4) = \frac{1}{32} x^2 (4)^{3/2} = \frac{1}{4} x^2$$

$$F(y | X \leq x) = \frac{F(x, y)}{F_X(x)} = \frac{\frac{1}{32} x^2 y^{3/2}}{\frac{1}{4} x^2} = \boxed{\frac{1}{8} y^{3/2}}$$

$$f(y | X \leq x) = \frac{\partial F / \partial y}{F_X(x)} = \frac{\frac{3}{64} x^2 y^{1/2}}{\frac{1}{4} x^2} = \boxed{\frac{3}{16} y^{1/2}}$$

$$3) \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{3}{32} \sqrt{y} \int_0^2 x dx = \frac{3}{32} \sqrt{y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{3}{16} \sqrt{y}$$

$$F(x | Y=y) = \frac{\int_{-\infty}^x f(u, y) du}{f_Y(y)} = \frac{\frac{3\sqrt{y}}{32} \int_0^x u du}{\frac{3}{16} \sqrt{y}} = \frac{\frac{3\sqrt{y}}{32} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^x}{\frac{3}{16} \sqrt{y}}$$

$$F(x | Y=y) = \frac{1}{4} x^2$$

$$f(x | Y=y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{3}{32} x \sqrt{y}}{\frac{3}{16} \sqrt{y}} = \frac{1}{2} x$$

$$4) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{3}{32} x \int_0^4 \sqrt{y} dy = \frac{3x}{32} \left[\frac{2y^{3/2}}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{2} x$$

$$F(y | X=x) = \frac{\int_{-\infty}^y f(x, v) dv}{f_X(x)} = \frac{\frac{3x}{32} \int_0^4 \sqrt{v} dv}{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{3x}{32} \left[\frac{2v^{3/2}}{3} \right]_0^y}{\frac{x}{2}}$$

$$F(y | X=x) = \frac{1}{8} y^{3/2}$$

$$f(y | X=x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{3}{32} x \sqrt{y}}{\frac{x}{2}}$$

$$f(y | X=x) = \frac{3}{16} \sqrt{y}$$

Örnek 5.7)

Soğutucu üreten

I Şirketi piyasanın % 45'ini , II Şirketi piyasanın % 30'unu kontrol ediyor. Diğer şirketler ise geriye kalan % 25'i paylaşıyor.

Soğutucu satın alan herhangi iki müşteri rasgele seçiliyor ve I. Şirketin sattığı soğutucu sayısı X , II. Şirketin sattığı soğutucu sayısı Y rasgele değişkeni olarak tanımlanıyor.

1) Satın alınan soğutucuların müşterilere / şirketlere göre dağılımını ve bunların olasılıklarını tablo'layınız.

2) X rasgele değişkeninin alabileceği $x = 0, 1, 2$ değerlerini koşul kabul ederek $P(y | X = x)$ koşullu olasılıklarının tablosunu yapınız.

Yanıt :

1)

Müşteri / Şirket		Gösterim	Olasılıklar	Toplam olasılık
I. Müşteri	II. Müşteri	(x, y)		
I. Şirket'ten	II. Şirket'ten	(1, 1)	$0.45(0.30) = 0.135$	
II. Şirket'ten	I. Şirket'ten	(1, 1)	$0.30(0.45) = 0.135$	$f(1, 1) = 0.135 + 0.135 = 0.270$
I. Şirket'ten	I. Şirket'ten	(2, 0)	$0.45(0.45) = 0.2025$	$f(2, 0) = 0.2025$
II. Şirket'ten	II. Şirket'ten	(0, 2)	$0.30(0.30) = 0.09$	$f(0, 2) = 0.09$
Diğer şirketlerden	Diğer şirketlerden	(0, 0)	$0.25(0.25) = 0.0625$	$f(0, 0) = 0.0625$
Diğer şirketlerden	II. Şirket'ten	(0, 1)	$0.25(0.30) = 0.075$	
II. Şirket'ten	Diğer şirketlerden	(0, 1)	$0.30(0.25) = 0.075$	$f(0, 1) = 0.075 + 0.075 = 0.15$
Diğer şirketlerden	I. Şirket'ten	(1, 0)	$0.25(0.45) = 0.1125$	
I. Şirket'ten	Diğer Şirketlerden	(1, 0)	$0.45(0.25) = 0.1125$	$f(1, 0) = 0.1125 + 0.1125 = 0.225$
				$\sum f(x, y) = 1.000$

Not : Sonuçlar , istenilen basamakta yuvarlatılabilir.

215. Sayfadaki tablo'nun son sütunu, aşağıdaki gibi tablo'lanabilir.

$x \quad y$	0	1	2	$\sum f_X(x)$
0	0.0625	0.1500	0.0900	0.3025
1	0.2250	0.2700	0.0000	0.4950
2	0.2025	0.0000	0.0000	0.2025
$f_Y(y)$	0.4900	0.4200	0.0900	$\sum f_Y(y) = \sum f_X(x)$ = 1

$$2) \quad P(y | X=x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad , \quad [f_X(x) \neq 0]$$

dır. $f(x, y)$ değerleri yukarıdaki tablo'nun gövdesinden, $f_X(x)$ değerleri de tablo'nun son sütunundan alınacaktır.

$$P(0 | 0) = \frac{f(0, 0)}{f_X(0)} = \frac{0.0625}{0.3025} = 0.2066,$$

$$P(1 | 0) = \frac{f(0, 1)}{f_X(0)} = \frac{0.1500}{0.3025} = 0.4959,$$

$$P(2 | 0) = \frac{f(0, 2)}{f_X(0)} = \frac{0.0900}{0.3025} = 0.2975,$$

$$P(0 | 1) = \frac{f(1, 0)}{f_X(1)} = \frac{0.2250}{0.4950} = 0.4550,$$

$$P(1 | 1) = \frac{f(1, 1)}{f_X(1)} = \frac{0.2700}{0.4950} = 0.5450,$$

$$P(2 | 1) = \frac{f(1, 2)}{f_X(1)} = \frac{0.0000}{0.4950} = 0.0000,$$

$$P(0|2) = \frac{f(2,0)}{f_X(2)} = \frac{0.2025}{0.2025} = 1.0000 ,$$

$$P(1|2) = \frac{f(2,1)}{f_X(2)} = \frac{0.0000}{0.2025} = 0.0000 ,$$

$$P(2|2) = \frac{f(2,2)}{f_X(2)} = \frac{0.0000}{0.2025} = 0.0000 .$$

Aşağıdaki tablo oluşur :

	y = 0	y = 1	y = 2	
P (y x=0)	0.2066	0.4959	0.0900	$\sum P(y x=0) = 1.0$
P (y x=1)	0.4550	0.5450	0.0000	$\sum P(y x=1) = 1.0$
P (y x=2)	1.0000	0.0000	0.0000	$\sum P(y x=2) = 1.0$

Not : Y'nin alabileceği y=0 , 1 , 2 değerleri koşul kabul edilerek P (x | Y=y) koşullu olasılıkları da benzer şekilde hesaplanıp tablo yapılabilir.

BAĞIMSIZLIK

Tanım 5.5)

Kesikli veya sürekli X , Y rasgele değişkenleri gözönüne alınıyor.

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad , \quad [V(x,y) \text{ için}]$$

ise X , Y birbirinden bağımsız rasgele değişkenlerdir.

Yukarıdaki tanım'dan iki önemli sonuç elde edilir.

X, Y rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ise

Sonuç 1)

$$f(x | Y=y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x) \quad , \quad f_Y(y) \neq 0$$

$$f(y | X=x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y) \quad , \quad f_X(x) \neq 0$$

dir.

Sonuç 2)

X, Y bağımsız ve sürekli rasgele değişkenlerinin herhangi iki fonksiyonu $U(X), V(Y)$ olsun.

$$E[U(X) \cdot V(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \cdot V(y) \cdot f(x, y) \, dx \, dy$$

X, Y rasgele değişkenleri, varsayımdan dolayı bağımsız olduklarından

$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte, yerine yerleştirilirse

$$E[U(X) \cdot V(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \cdot V(y) \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot dx \, dy$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \cdot f_X(x) \, dx \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} V(y) \cdot f_Y(y) \, dy \right] ; \text{ buradan}$$

$$E[U(X) \cdot V(Y)] = [E[U(X)]] \cdot [E[V(Y)]]$$

dir. X, Y rasgele değişkenleri kesikli ise integral işareti yerine $\sum$ işareti kullanılarak benzer şekilde ispat yapılabilir.

Örnek 5.8)

X, Y rasgele değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x, y) = (2, 7), (3, 4), (3, 7), (2, 4) \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } (x, y)' \text{ler için} \end{cases}$$

veriliyor. X, Y rasgele değişkenleri bağımsız mıdır?

Yanıt :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 2, 3 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } x' \text{ler için} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & y = 4, 7 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } y' \text{ler için} \end{cases}$$

Her noktada $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ eşitliği sağlanır. Bu nedenle X, Y rasgele değişkenleri bağımsızdır.

Örnek 8.9)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x, y) = (2, 9), (3, 4), (3, 7), (2, 4) \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } (x, y)' \text{ler için} \end{cases}$$

bileşik olasılık fonksiyonu veriliyor. X, Y rasgele değişkenleri bağımsız mıdır?

Yanıt :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 2, 3 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } x' \text{ler için} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & y = 9 \text{ için} \\ \frac{1}{2} & y = 4 \text{ için} \\ \frac{1}{4} & y = 7 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } y' \text{ler için} \end{cases}$$

dir.

Meselâ $x=2$, $y=9$ değerlerini ele alalım:
 $P(x=2, y=9) = 1/4$, $P(x=2) = 1/2$, $P(y=9) = 1/4$ olduğundan,
 $P(x=2, y=9) \neq P(x=2) \cdot P(y=9)$ yani $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ dir.
 x, y 'nin Sadece bir değeri için bile eşitlik sağlanmaz ise X, Y rasgele değişkenlerinin bağımlı oldukları söylenebilir.

Örnek 5.10)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 5 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } (x, y)'\text{ler için} \end{cases}$$

bileşik yoğunluk fonksiyonu veriliyor. X, Y rasgele değişkenleri bağımsız mıdır?

Yanıt :

$$f_X(x) = \frac{1}{10} \int_0^5 dy = \frac{1}{2}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{10} \int_0^2 dx = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \text{ olduğundan } f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \text{ eşitliği sağlanır.}$$

Şu halde X, Y rasgele değişkenleri bağımsızdır.

Örnek 5.11)

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi \text{ için} \\ 0 & \text{diğer } (x, y)' \text{ler için} \end{cases}$$

eşik yoğunluk fonksiyonu veriliyor. X, Y rasgele değişkenleri bağımsız mıdır?

Yanıt :

$$f_X(x) = x \int_0^\pi \sin y \, dy = x [-\cos y]_0^\pi = 2x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ için}$$

$$f_Y(y) = \sin y \int_0^1 x \, dx = \sin y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \sin y \quad 0 \leq y \leq \pi \text{ için}$$

$$f_Y(y) = 2x \left(\frac{1}{2} \sin y \right) = x \sin y = f(x, y) \text{ olduğundan } X, Y \text{ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız'dır.}$$