KUVVET SERİLERİ

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$ şeklindeki seriye "$x=c$ kuvvetlerinin kuvvet serisi" veya "$x=c$ civarında bir kuvvet serisi" denir.

* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sabitleri kuvvet serisinin katsayılarıdır.

** Kuvvet serisinin terimleri bir x değişkeninin fonksiyonu olduğundan, seri x in her bir değeri için yakınsayabilir veya ıraksayabilir. Serinin yakınsak olduğu değerler için toplam x'e bağlı bir fonksiyon tanımlar.

* c noktası $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık merkezidir. Seri, $x=c$ de a_0'a yakınsar.

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kuvvet serisi için aşağıdakilerden biri sağlanır:

a) Seri sadece $x=c$ de yakınsaktır.

b) Seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

c) Seri, $|x-c|<R$ eşitsizliğini sağlayan her x'de yakınsak, $|x-c|>R$ yi sağlayan her x'de ıraksayacak şekilde bir R reel sayısı olabilir. Bu durumda seri $x=c+R$ ve $x=c-R$ uç noktalarında yakınsayabilir veya ıraksayabilir.

* Kuvvet serisinin yakınsak olduğu aralığa (noktaya) $[c,c]$ yakınsaklık aralığı denir.

(c) deki R sayısına yakınsaklık yarıçapı denir. (a) durumunda yakınsaklık yarıçapının $R=0$ olduğunu söyleriz. (b) de $R=\infty$ olur.

* Yakınsaklık yarıçapı R, yakınsaklık merkezi c olan kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı:

$[c-R, c+R]$, $[c-R, c+R)$, $(c-R, c+R]$, $(c-R, c+R)$ aralıklarından biri olabilir.

Bir Kuvvet Serisinin Yakınsaklığını Test Etmek

① Oran Testi kullanılarak serinin mutlak yakınsadığı bir aralık bulunur.

$$|x-c|<R \Rightarrow c-R<x<c+R$$

② Mutlak yakınsaklık aralığı sonlu ise uç noktalarda yakınsaklık / ıraksaklık incelemesi yapılır.

③ Yakınsaklık aralığı dışında kalan noktalarda seri ıraksaktır.

* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hangi x değerleri için yakınsar?

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0<1 \Rightarrow$$

Seri her $x\in\mathbb{R}$ için mutlak yakınsar.

* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$ hangi x değerleri için yakınsar?

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|.(n+1) = \infty \quad (x\neq 0 \text{ için})$$

Seri sadece merkezinde yani $x=0$ da yakınsar.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerleri?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| . \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1} = |x| < 1$$

$|x|<1$ için seri mutlak yakınsaktır. $\boxed{-1<x<1}$ M.Yak.

$x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ => Alterne Harmonik Seri şartlı yakınsaktır.

$x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ => Harmonik Seri ıraksaktır.

Sonuç:
$x \in (-1,1)$ de seri mutlak yakınsak
$x=-1$ de seri şartlı yakınsak
} Yakınsaklık Aralığı $[-1,1)$

$\mathbb{R} - [-1,1)$ de seri ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ serisinin mutlak yak., şartlı yak., ıraksak olduğu x değerlerini ve yakınsaklık aralığını inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+3}} . \frac{\sqrt{n^2+3}}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| . \underbrace{\frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{(n+1)^2+3}}}_{1} = |x| < 1 \Rightarrow \boxed{-1<x<1}$$ Mutlak Yak.

* $x=+1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ serisi elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisini seçelim. Iraksaktır => $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = 1 \neq 0, \infty$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.
$\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ de ıraksaktır.

* $x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ elde edilir.

Mutlak Yak. değildir. Şartlı yakınsak mı?

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} > 0$ ✓ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}} < a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ ✓ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} = 0$ ✓

Alterne seri testine göre $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ şartlı yakınsaktır.

<u>Sonuç:</u>

Mutlak Yakınsaklık Aralığı: $(-1,1)$
Şartlı Yakınsaklık: $x=-1$

$\Big\}$ $[-1,1) \rightarrow$ Yakınsaklık aralığı

$\mathbb{R}-[-1,1)$ de seri ıraksaktır.

---

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\,3^n}$ serisinin merkezini, mutlak yak. / şartlı yak. olduğu x değerlerini, yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(2x+5)^{n+1}}{((n+1)^2+1)\,3^{n+1}}}{\dfrac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\,3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} |2x+5| \cdot \underbrace{\frac{n^2+1}{((n+1)^2+1)}}_{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{|2x+5|}{3} < 1$$

$|2x+5| < 3 \Rightarrow -3 < 2x+5 < 3 \Rightarrow \boxed{-4 < x < -1} \Rightarrow$ Mutlak Yak. Aralığı

* $x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ olur.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p>2$ yakınsak) serisini seçelim.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty \rightarrow$ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ de yakınsak.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow$ Yak. $\Rightarrow \boxed{x=-1}$ Mut. Yak.

$*$ $x=-4$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ olur.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ mutlak yak.

Sonuç:

Mutlak Yak. : $[-4,-1]$
Şartlı Yak. : —

$\Big\}$ $[-4,-1]$ yakınsaklık aralığı

$\mathbb{R}-[-4,-1]$'de seri ıraksaktır.

Kuvvet Serilerinde İşlemler

① Yakınsama aralıklarının kesişiminde iki kuvvet serisi tıpkı sabit terimli serilerdeki gibi terim terim eklenip çıkarılabilir.

$$\left.\begin{array}{ll} A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n & |x-c|<R \\ B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-c)^n & |x-c|<R \end{array}\right\} \quad A(x)+B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-c)^n \quad |x-c|<R$$

② Kuvvet Serileri İçin Çarpım Teoremi:

Eğer $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ve $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, $|x|<R$ aralığında mutlak yakınsak iki seri ise ve

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$ olarak verilirse

o zaman, $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ serisi $|x|<R$ aralığında $A(x).B(x)$ e yakınsar.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=A(x).B(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)$$

c_n genel katsayısını bulmak zordur ve çoğu zaman genel bir formül de bulunamayabilir. Bu gibi durumlarda çarpım serisinin ilk birkaç terimini elde etmek yeterlidir.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = ?$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(1+x+x^2+\cdots) \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \cdots\right)$$

$$+ \left(x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} - \cdots\right) + \cdots$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \cdots$$

---

③ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = f(x)$, $(c-R < x < c+R)$

serisini bir α sabitiyle çarparsak, oluşan

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n (x-c)^n = \alpha f(x)$ serisi de $c-R < x < c+R$ aralığında

yakınsaktır.

★ Bir kuvvet serisi yakınsadığı aralıkta bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlar.

★★ NOT: ★★ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$ dir.

ispat:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \Rightarrow$ Geometrik Seri $\quad a=1,\ r=x$

Bu seri $|r| = |x| < 1$ için $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$ e yakınsar.

Dolayısıyla $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1)}$ dir.

④ **Teorem**: Eğer, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x|<R$ için mutlak yakınsak ise, o zaman her sürekli $f(x)$ fonksiyonu için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ serisi de $|f(x)|<R$ için yakınsar.

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve bu aralıkta yakınsadığı fonksiyonu bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ olduğunu biliyoruz.

$x \to 4x^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} \quad |4x^2|<1 \to -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n} = \overbrace{\frac{1}{1-4x^2}}^{\text{yakınsadığı fonk.}} \quad \overbrace{\left(|x|<\frac{1}{2}\right)}^{\text{yakınsaklık aralığı}} \text{ bulunur.}$$

---

⑤ **Türev:**

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ serisi $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahipse, $c-R<x<c+R$ aralığında aşağıdaki fonksiyonu tanımlar;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

Bu durumda,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.(x-c)^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)a_n(x-c)^{n-2}$$

dir. Bu türev serilerinden her biri $c-R<x<c+R$ de yakınsar.

6 Terim Terime İntegrasyon:

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ serisinin $c-R<x<c+R$ için yakınsak olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + k$$

serisi $c-R<x<c+R$ için yakınsaktır.

(*) $f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1<x<1)$ için

$f'(x)$, $f''(x)$ türev serilerini bulun.

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (-1<x<1)$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \quad (-1<x<1)$$

(*) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots \quad (-1<x<1)$

ise $f(x)=?$

$$f'(x)=1-x^2+x^4-x^6\dots \quad (-1<x<1)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}=f'(x) \quad (-1<x<1)$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\int f'(x)\,dx}_{f(x)} = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctan}x + c \Rightarrow f(x)=\text{Arctan}x+c$$

$x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow c=0 \qquad \Rightarrow f(x)=\text{Arctan}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$(-1<x<1)$

(*) Aşağıdaki fonksiyonların kuvvet serisi temsillerini ve geçerli oldukları aralıkları bulunuz.

a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ b) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ c) $\ln(1+x)$

Cevap:

(*) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

a) (*) dan türev alırsak:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad (-1<x<1)$$

b) Bir kez daha türev alırsak:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \qquad (-1<x<1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n.(n-1)}{2} x^{n-2} \qquad (-1<x<1)$$

c) (*) da $x=-t$ dönüşümü yapalım.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 - \dots$ $(-1<t<1)$ olur. İntegral alırsak:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + c \qquad (-1<t<1)$$

$$\left.t=0 \Rightarrow c=0 \right\} \Rightarrow \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad (-1<t<1)$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$ serisini kullanarak

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ serisinin toplamını bulunuz. Bu sonucu kullanarak

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

Cevap:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1) \rightarrow x \text{ ile çarp}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1) \rightarrow \text{Türev al}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (-1<x<1) \rightarrow x \text{ ile çarp}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (-1<x<1) \checkmark$$

$x = \frac{1}{2}$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \underline{\underline{6}}$