SERİLER

Bir kuralla birbirine bağlı sayılar dizisinin bütün terimlerinin toplamından elde edilen ifadeye seri denir.

☆ Yani; $\{a_n\}=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$ dizisinin terimleri toplanarak $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$ serisi elde edilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şeklinde gösterilir.

Örneğin:

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$

⊛ $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$

⊛ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

⊛ $\underbrace{\frac{1}{2}}_{1^2+1}+\underbrace{\frac{1}{5}}_{2^2+1}+\underbrace{\frac{1}{10}}_{3^2+1}+\underbrace{\frac{1}{17}}_{4^2+1}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

NOT: Bir serinin ilk teriminin 1 den başlama zorunluluğu yoktur. Gerekli olduğunda serinin indisini başka bir değerden başlatmak için değiştirebiliriz. Örneğin; $n=m-2$ dönüşümünü kullanarak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ toplamını $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$ şeklinde yazabiliriz.

Her iki toplam da aynı açılımı verir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\dots = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

Kısmi Toplamlar Dizisi ve Bir Serinin Yakınsaklığı

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin $\{S_n\}$ ile gösterilen kısmi toplamlar dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$$

$\{S_n\}$ dizisine "$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi",

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ toplamına da "serinin n. kısmi toplamı" denir.

☆ $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ toplamı $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin n. kısmi toplamı olmak üzere, eğer $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ise o zaman "$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi S toplamına yakınsıyor" denir ve bu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$ ile ifade edilir. Benzer şekilde; eğer $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi ıraksar veya $\mp\infty$'a ıraksar ise seri de aynı şekilde ıraksar veya $\mp\infty$'a ıraksar.

ÖZET :

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için ; S_n n. kısmi toplam olmak üzere :

$\lim_{n\to\infty} S_n$
- $= S$ ise seri S'ye yakınsar (yani toplamı S'dir)
- $= \mp\infty$ ise seri $\mp\infty$'a ıraksar
- limit mevcut değil ise seri ıraksar

Geometrik Seri :

n. terimi $a_n = a.r^{n-1}$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ şeklindeki seriye "geometrik seri" denir. Burada a ve r, $a \neq 0$ ile verilen sabit sayılardır.

Geometrik serinin ilk terimi a sayısıdır. r sayısına serinin ortak oranı denir. Çünkü $n \geq 1$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a.r^n}{a.r^{n-1}} = r$$ dir.

Geometrik Serinin Yakınsaklığı / Iraksaklığı :

$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ geometrik serisinin n. kısmi toplamı S_n'i hesaplayalım.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$
$$- \quad rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

$$\boxed{(1-r)S_n = a.(1-r^n)}$$

1. Eğer $r=1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a = a+a+a+\dots+a+\dots$ serisi elde edilir. Bu durumda $S_n = a+a+\dots+a = n.a$ ve

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n.a \rightarrow +\infty \ (a>0)$, $\rightarrow -\infty \ (a<0)$ olur ki; böylece seri ıraksak tır.

---

* $r\neq 1$ ise $(1-r)S_n = a.(1-r^n) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$

---

2. $|r|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ olduğundan $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}}$ olur.

Yani seri $\frac{a}{1-r}$ ye yakınsar.

---

3. $r>1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ olur. Bu durumda:

* $a>0$ ise $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a.(1-r^n)}{1-r} = +\infty$

* $a<0$ ise $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a.(1-r^n)}{1-r} = -\infty$

olur. Yani seri $+\infty$ / $-\infty$'a ıraksar.

---

4. $r\leq -1$ ise. $\lim_{n\to\infty} r^n$ mevcut değildir. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} S_n$ mevcut değildir. Seri ıraksaktır.

---

* Bütün durumları özetlersek:

$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} \rightarrow$

- $|r|<1$ ise $\frac{a}{1-r}$'ye yakınsar
- $\left.\begin{matrix} r\geq 1 \\ a>0 \end{matrix}\right\}$ ise $+\infty$'a ıraksar
- $\left.\begin{matrix} r\geq 1 \\ a<0 \end{matrix}\right\}$ ise $-\infty$'a ıraksar
- $r\leq -1$ ise seri ıraksaktır.

⊛ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=?$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $a=1$ $|r|=\frac{1}{2}<1 \rightarrow$ Seri yakınsaktır

$r=\frac{1}{2}$

$\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \Rightarrow$ Seri 2'ye yakınsar.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots=2$ dir.

⊛ $\pi-e+\frac{e^2}{\pi}-\frac{e^3}{\pi^2}+\dots$ serisinin toplamını bulunuz.

$\pi-e+\frac{e^2}{\pi}-\frac{e^3}{\pi^2}+\dots=\pi\left(1-\frac{e}{\pi}+\frac{e^2}{\pi^2}-\frac{e^3}{\pi^3}+\dots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi.\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$ $a=\pi$

$r=-\frac{e}{\pi}$

$|r|=\left|-\frac{e}{\pi}\right|=\frac{e^{\rightarrow 2,71}}{\pi_{\rightarrow 3,14}}<1 \Rightarrow$ Seri $\frac{a}{1-r}=\frac{\pi}{1+\frac{e}{\pi}}=\frac{\pi^2}{e+\pi}$ 'ye yakınsar.

⊛ $1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots=?$

$\xrightarrow{\sqrt{2}}\ \xrightarrow{\sqrt{2}}\ \xrightarrow{\sqrt{2}} \rightarrow r=\sqrt{2}$ $a=1$

$1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} r=\sqrt{2}\not<1 \\ a=1>0 \end{array}\right\}$ Seri $+\infty$'a ıraksar

---

⊛ $x=0,323232\dots=0,\overline{32}$ sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak yazınız.

$x=0,323232\dots=\frac{32}{100}+\frac{32}{(100)^2}+\frac{32}{(100)^3}+\dots=\frac{32}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{(100)^2}+\dots\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} a=\frac{32}{100} \\ r=\frac{1}{100}<1 \end{array}\right\}$ Seri yakınsaktır

$$x=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{32}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\underline{\underline{\frac{32}{99}}}$$

Teleskopik ve Harmonik Seriler

Teleskopik Seri: Bir serinin kısmi toplamları, eğer onun terimlerini basit kesirlere ayırarak basit olarak formüle edilebiliyorsa bu seriye "Teleskopik Seri" denir.

Harmonik Seri: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisine "Harmonik Seri" denir.

Bu seri $+\infty$'a ıraksar.

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = ?$

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \;!$$

Seri teleskopik seridir.

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = \underline{1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = \underline{1} \text{ dir.}$$

$\circledast$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = ?$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n^2+3n+2}$$

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = \underline{1}$$

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = ?$

$S_n = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{8}{9} + \dots + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$!

$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$

$S_n = \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$ $\boxed{\ln a + \ln b = \ln a.b}$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdots\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{1}{2}$ //

Seriler ile İlgili Bazı Teoremler :

1) $\sum a_k = A$, $\sum b_k = B$ ise $\sum a_k \mp b_k = A \mp B$, $\sum \alpha a_k = \alpha A$

2) $\sum a_n$ ıraksak ise $\alpha \sum a_n$ de ıraksaktır.

3) $\sum a_n$ ıraksak, $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n \mp b_n$ de ıraksaktır.

4) $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ her ikisi de ıraksak olsalar dahi $\sum a_n \mp b_n$ serisi yakınsak olabilir. Örneğin:

$\sum a_n = 1+1+1+\dots$

$\sum b_n = -1-1-1-\dots$

$\Big\}$ $\sum a_n + b_n = 0+0+\dots 0+\dots = 0 \Rightarrow$ yakınsak

5) Bir seriye sonlu sayıda terim eklemek veya silmek serinin karakterini değiştirmez.

★★
6) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. (Tersi doğru değildir)

★★
7) n. Terim Testi:

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

(*) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{2}<1}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{3}<1}} = 2 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

(*) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}_{}$$

$a = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{3} < 1$ $\qquad$ $a = \frac{4}{3}$, $r = \frac{2}{3} < 1$

$$= \frac{\overset{a}{\frac{1}{3}}}{1-\underset{r}{\frac{1}{3}}} + \frac{\overset{a}{\frac{4}{3}}}{1-\underset{r}{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ serisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan n. terim testine göre ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi ıraksaktır. Çünkü $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ limiti mevcut değildir. Dolayısıyla n. terim testine göre ıraksaktır.