Doç.Dr. S. Demirel

# FOURIER SERİLERİ

Bu bölümde önce reel $t$ değişkenine sahip reel değerli $U(t)$ fonksiyonunun Fourier serisi gösterimini geliştirip sonra Kompleks Fourier serilerini ve son olarak Fourier Transformunu göreceğiz.

## TANIM:

Eğer $U(t)$ periyodu $2\pi$ olan $[-\pi,\pi]$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon ise $U(t)$'nin fourier serisi: $S(t) \Rightarrow$

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos nt + b_n \sin nt \right)$$

ile verilir. Buradaki $a_n$ ve $b_n$ katsayıları Euler formülleri ile adlandırılır ve aşağıdaki gibi

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(t) . \cos nt \, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(t) \sin nt \, dt \qquad n = 1, 2, \ldots$$

tanımlanırlar.

Bir fonksiyonu fourier serisine açmak için

Dirichlet Şartları:

(i) $n = n_0$ sınırlı sayısı ise $n$ tane süreksizliği olmak veya sürekli olmak.

(ii) Sınırlı sayıda extrem (max., min.) değer almak.

(iii) fonksiyon sınırlı olmalı.

(iv) Fonksiyon bir periyod üzerinde integrallenebilir olmalı.

## TEOREM (Fourier Açılımı):

Diyelim ki $S(t)$ $U(t)$'nin Fourier Serisi olsun. Eğer $U'(t)$ $[-\pi, \pi]$ aralığında parçalı sürekli ise, $S(t)$ bütün $t \in [-\pi, \pi]$ için yakınsar ve $U(t) = S(t)$ eşitliği $U(t)$'nin sürekli olduğu $t \in [-\pi, \pi]$ aralığında geçerlidir. Eğer $t = a$ $U$'nun süreksizlik gösterdiği nokta ise

$$S(a) = \frac{\overset{\text{soldan limit}}{U(a^-)} + \overset{\text{sağdan limit}}{U(a^+)}}{2}$$ 'dir.

Bu durumda Fourier açılımı:

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos nt + b_n \sin nt \right)$$

olur ve $a$ noktası 'düzgün süreksizlik' noktasıdır.

8)

$U(t) = \frac{t}{2}$ $\quad t \in (-\pi, \pi)$ ve $U(t) = U(t+2\pi)$ ise

bu fonksiyonun fourier açılımını bulunuz?

$t = u$
$\cos nt\, dt = dv$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{2} \cos nt\, dt = t\frac{\sin nt}{2\pi n} + \frac{\cos nt}{2\pi n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{2} \sin nt\, dt = -\frac{t\cos nt}{2\pi n} + \frac{\sin nt}{2\pi n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

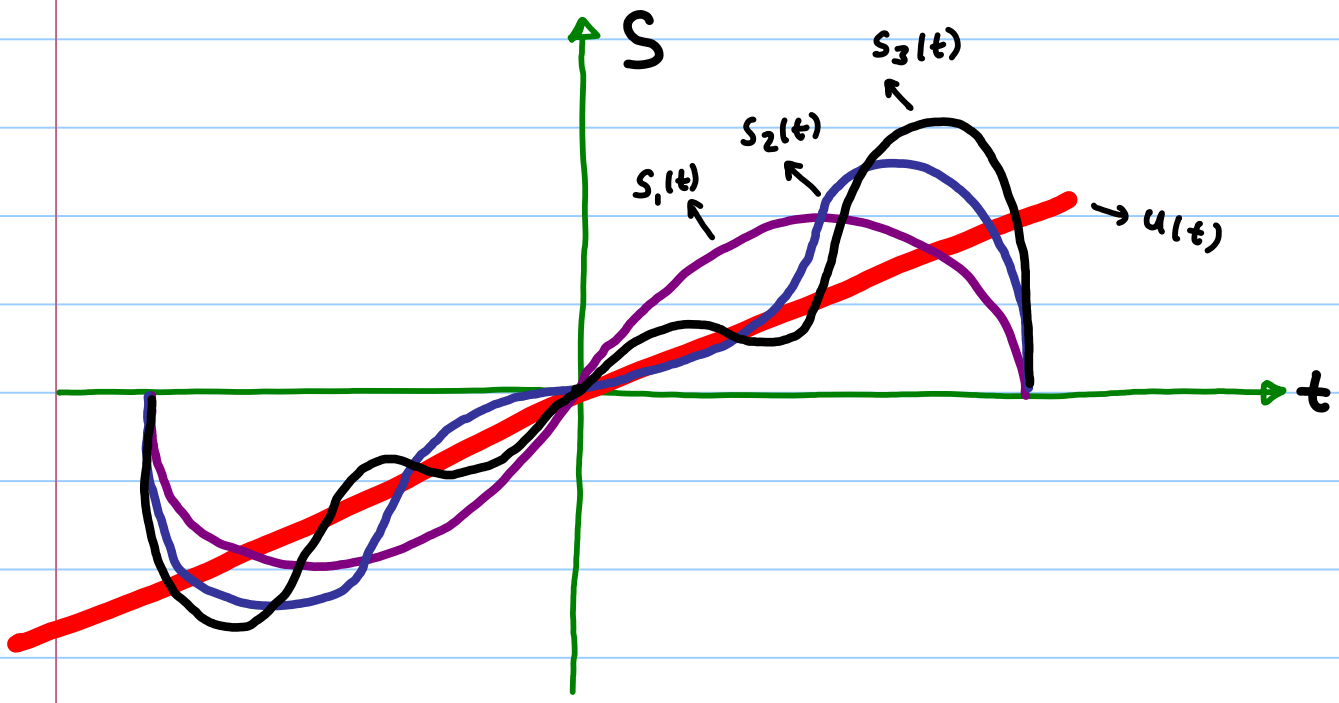
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{2}\, dt = \frac{t^2}{4\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$S_1(t) = \sin t$

$S_2(t) = \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t$

$S_3(t) = \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{\sin 3t}{3}$

$\vdots$




## TEOREM:

Eğer $U(t)$ ve $V(t)$'nin Fourier Serisi gösterimleri var ise toplamları $W(t) = U(t) + V(t)$'nin de fourier serisi gösterimi vardır ve Fourier Serisi katsayısı $U$ ve $V$'nin katsayılarının toplamıdır.

**TEOREM:** (Fourier Kosinüs Serileri)

Farzedelim ki $U(t)$ bir çift fonksiyon. Eğer $U(t)$'nin periyodu $2\pi$ ve $U(t)$ ve $U'(t)$ parçalı sürekli ise $U(t)$'nin Fourier serisi sadece kosinüslü terimler içerir. Bütün $n$'ler için $b_n = 0$'dır.

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U(t) \cdot \cos nt \cdot dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

**TEOREM:** (Fourier Sinüs Serileri)

Farzedelim ki $U(t)$ bir tek fonksiyon. Eğer $U(t)$'nin periyodu $2\pi$ ve $U(t)$ ve $U'(t)$ parçalı sürekli ise $U(t)$'nin Fourier serisi sadece sinüslü terimler içerir. Bütün $n$'ler için $a_n = 0$'dır.

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U(t) \cdot \sin nt \cdot dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

## TEOREM: (INTEGRASYON)

Eğer $u(t)$'nin fourier serisi gösterimi varsa, integralinin de fourier serisi gösterimi vardır ve Fourier serisindeki terimlerin integrasyonu ile elde edilir.

$$\int_0^t u(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{[a_n + a_0(-1)^{n+1}]\sin nt}{n} - \frac{b_n \cos nt}{n}\right]$$

Burada

$$a_0 \frac{t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0(-1)^{n+1}\sin nt}{n}$$ kullanılmıştır.

## TEOREM: (TÜREV)

Eğer $u(t)$'nin fourier serisi gösterimi varsa

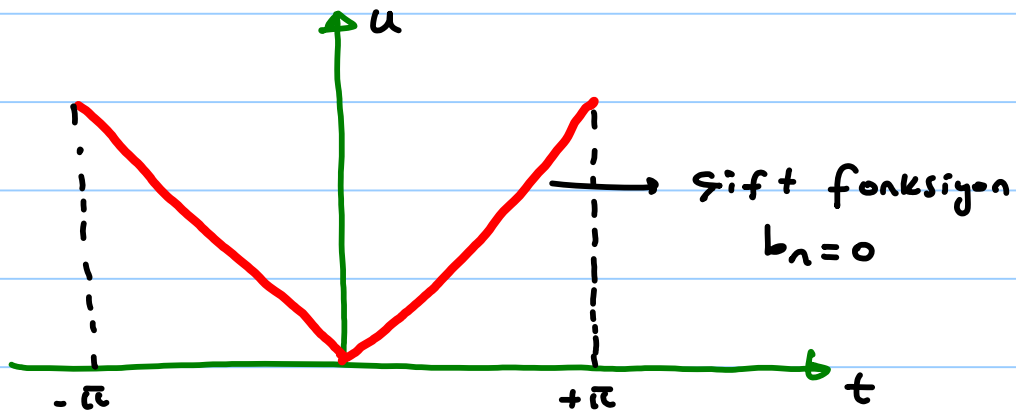
$$u'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\, b_n \cos nt - n.a_n.\sin nt\right)$$

olur.

ör/

$$u(t) = |t| \qquad t \in (-\pi, \pi) \quad \text{ve} \quad u(t+2\pi) = u(t)$$

Fourier serisi gösterimini bulunuz.




$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \cdot \cos nt \cdot dt = \left[\frac{2t \sin nt}{\pi n} + \frac{2 \cos nt}{\pi n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi} \Rightarrow$$

$$= \frac{2\cos n\pi - 2}{\pi n^2} = \frac{2(-1)^n - 2}{\pi n^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \, dt = \frac{t^2}{\pi}\Bigg|_0^{\pi} = \pi$$

$$u(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n^2}\right)\left((-1)^n - 1\right) \cos nt$$

n çift ise $a_n = 0$

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos[(2m-1)t]}{(2m-1)^2}$$

$n = 2m-1 \Rightarrow a_n = \dfrac{-4}{\pi(2m-1)^2}$

# DİRİCHLET PROBLEMİ

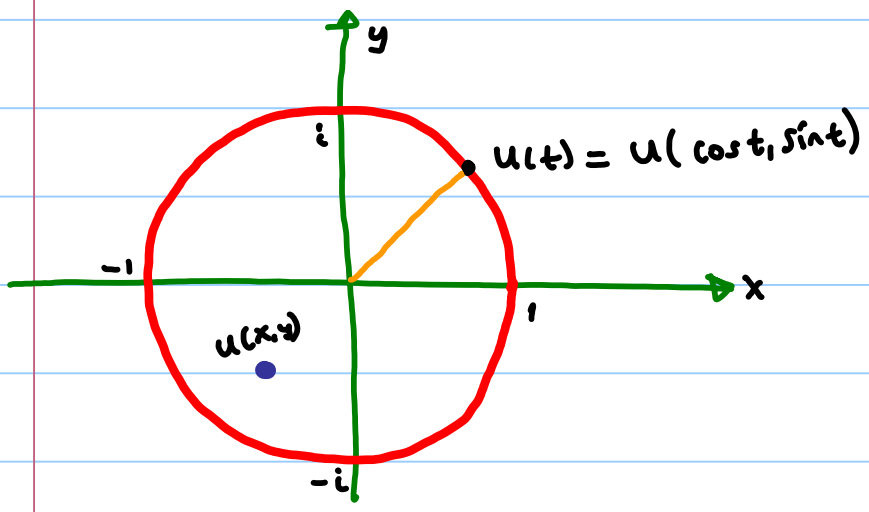
D birim diski için Dirichlet Problemi $(D: |z|<1)$

D içinde harmonik reel değerli $u(x,y)$ fonksiyonunu bulmayı içerir.

Burada $u(x,y)$:

$u(\cos\theta, \sin\theta) = u(\theta)$ $\quad -\pi < \theta < \pi$ sınır değerlerini alır.

Birim çember üzerinde $z = (\cos\theta, \sin\theta)$ dır.



**TEOREM:**

Eğer $u(t)$'nin periyodu $2\pi$ ise;

Fourier serisi gösterimi:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) \quad \text{ise}$$

D içinde Dirichlet problemi çözümü $u \Rightarrow$

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta \right)$$

burada:

$x+iy = re^{i\theta}$ kapalı $|z| \leq 1$ diskindeki noktaları gösteriyor.

## TEOREM: (Poisson Integral formülü)

Diyelim ki $u(x,y)$ kapalı birim diski $(|z|<1)$ içeren basit bağlı domende harmonik bir fonksiyon olsun. Eğer $u(x,y)$ sınır değerlerini alarak,

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = U(\theta) \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

değerini alıyorsa bu durumda $u$'nun integral gösterimi vardır;

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\, U(t)\, dt}{1+r^2-2r\cos(t-\theta)}$$

ile verilir burada $|z|<1$ 'dir.

# KOMPLEKS FOURIER SERİSİ

$U(t)$ $2\pi$ periyoduna sahip parçalı sürekli öyle bir reel değerli fonksiyon olsunki $U'(t)$ mevcut ve parçalı sürekli olsun.

Bu durumda $U(t)$ kompleks Fourier Serisi gösterimine sahiptir.

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$ 'dir. Burada $c_n \Rightarrow$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(t)\, e^{-int}\, dt$$ 'dir.

$c_n$ katsayıları kompleks sayılardır. Daha evvelden $U(t)$'yi reel trigonometrik seri halinde:

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos nt + b_n \sin nt \right)$$

olarak göstermiştik. Bu yüzden katsayılar arasındaki ilişki:

$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Isbat:

$$U(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-int} \Rightarrow$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos nt + i \sin nt) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (\cos nt - i \sin nt)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (c_n + c_{-n}) \cos nt + i (c_n - c_{-n}) \sin nt \right]$$

- Eğer $U(t)$ ve $U'(t)$ parçalı sürekli ve periyodu $2L$ ise

$U(t)$'nin kompleks fourier serisi gösterimi:

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n . e^{i\pi n (t/L)}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} U(t) e^{-i\pi n (t/L)} dt$$ 'dir.

# FOURIER TRANSFORMU

Periyodik fonksiyonların nasıl trigonometrik serilerle gösterildiğini gördük. Ancak pratik problemlerin birçoğu periyodik olmayan fonksiyonlar içerir. Periyodik olmayan $U(t)$ fonksiyonunun Fourier serisini benzer gösterilimi önce $U(t)$'nin $-L < t < L$ için fourier serisini bulup $L \to \infty$ limitini alarak bulunur. Bu sonuç $U(t)$'nin 'Fourier Transformu' olarak adlandırılır.

$$U_L(t) = U(t) \qquad -L < t \leq L$$

$$U_L(t) = U_L(t+2L) \quad \text{bütün } t\text{'ler için tanımlayalım.}$$

$U_L(t)$'nin kompleks fourier serisi gösterimi:

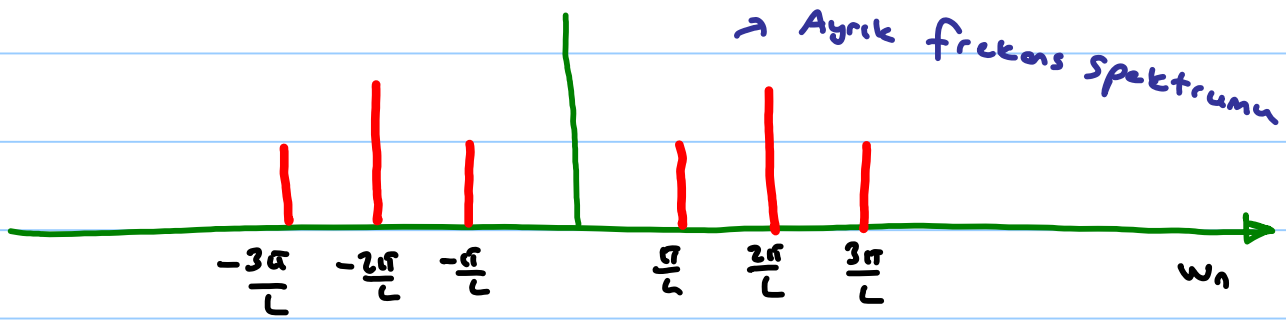
$$U_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\pi n t/L}$$

$$\omega_n = \frac{\pi n}{L} \quad \text{frekans olarak adlandırılır.}$$

$t$ zaman ise $\omega_n$'nin birimi rad/sn'dir.

Mümkün olan tüm frekans seti frekans spektrumu olarak adlandırılır,

$$\left\{ \ldots\ldots, \frac{-3\pi}{L}, \frac{-2\pi}{L}, \frac{-\pi}{L}, \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \ldots\ldots \right\}$$




L arttıkça $(L \to \infty)$ noktalar birbirine yaklaşır ve sürekli frekans spektrumu haline gelir.
Bu durumda seridekı toplam integral halini alır.

## TEOREM: (FOURIER TRANSFORMU)

$u(t)$ ve $u'(t)$ parçalı sürekli ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt < M$$

$M$ sıfırdan büyük bir sabit olsun.

$u(t)$'nin Fourier Transformu: $(F(w))$

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-iwt}\, dt$$ ile bulunur.

## TERS FOURIER TRANSFORMU

Sürekli olan noktalarda $u(t)$'nin integral gösterimi:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dw$$ 'dir.

$t=a$ süreksizlik noktasında integral gösterimi

$$\frac{u(a^-) + u(a^+)}{2}$$ değerine yakınsar.

$\mathcal{F}(u(t)) = F(\omega)$ ile gösterilir.

İsbat:

$\Delta w_n = w_{n+1} - w_n = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \frac{1}{2L} = \frac{1}{2\pi}\Delta w_n$ olur.

$$u_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} u(t)\, e^{-iw_n t}\, dt \right] e^{iw_n t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} u(t)\, e^{-iw_n t}\, dt \right] e^{iw_n t}\, \Delta w_n$$

$F_L(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} u(t)\, e^{-iwt}\, dt$ olarak tanımlanırsa:

$$u_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(w)\, e^{iw_n t}\, \Delta w_n$$

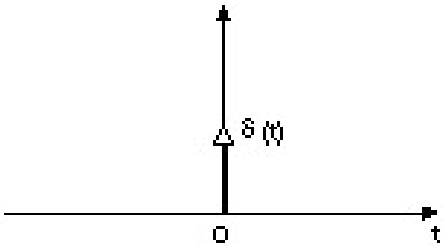
L büyüdükçe $F_L(w_n) \to F(w_n)$ ve $\Delta w_n \to 0$ olur,

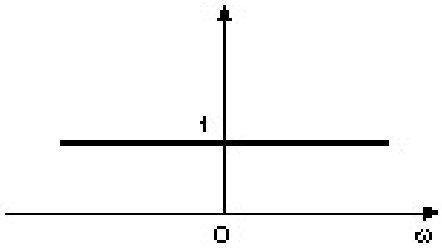
Bu nedenle sağ taraf integral haline gelir $\Rightarrow$

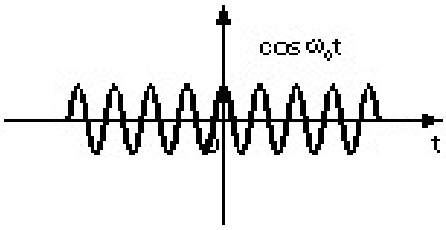
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dt \quad \text{olur.}$$

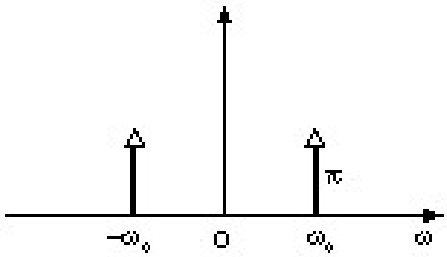
# Bazı fonksiyonların Fourier Transformu

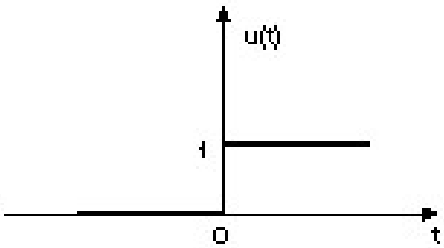
$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

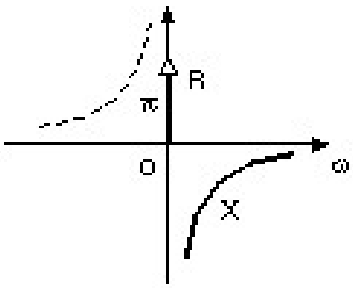


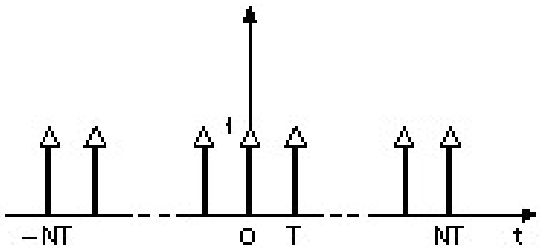



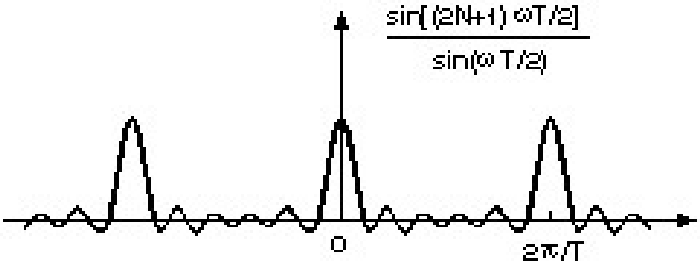



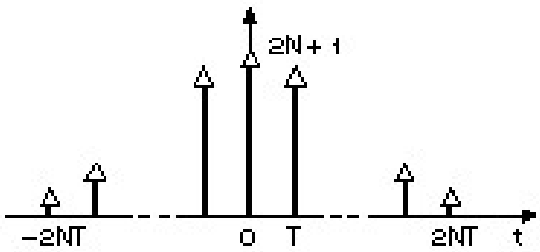



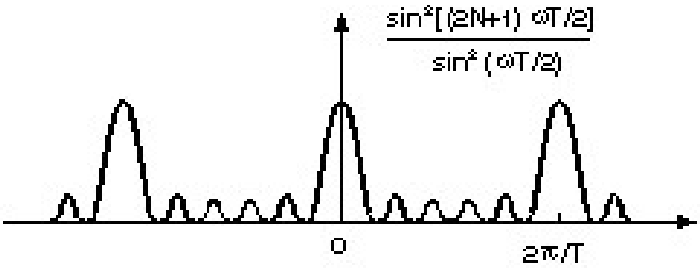




$$\delta(x)\delta(y) \Leftrightarrow 1 \qquad \delta(x) \Leftrightarrow 2\pi\delta(v)$$

$$\varphi(x) \Leftrightarrow 2\pi\Phi(u)\delta(v) \qquad \varphi(x)\delta(y) \Leftrightarrow \Phi(u)$$

# Fourier Transformunun Özellikleri:

**TABLE 4-1**
Fourier Transform Theorems[a]

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$

| Name of Theorem | | |
|---|---|---|
| Linearlik: 1. Superposition ($a_1$ and $a_2$ arbitrary constants) | $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ | $a_1X_1(f) + a_2X_2(f)$ |
| 2. Time delay | $x(t - t_0)$ | $X(f)e^{-j2\pi f t_0}$ |
| 3a. Scale change | $x(at)$ | $\lvert a\rvert^{-1}X\left(\frac{f}{a}\right)$ |
| b. Time reversal | $x(-t)$ | $X(-f) = X*(f)$ |
| 4. Duality | $X(t)$ | $x(-f)$ |
| 5a. Frequency translation | $x(t)e^{j\omega_0 t}$ | $X(f - f_0)$ |
| b. Modulation | $x(t)\cos\omega_0 t$ | $\frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$ |
| 6. Differentiation | $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ | $(j2\pi f)^n X(f)$ |
| 7. Integration | $\int_{-\infty}^{t} x(t')\,dt'$ | $(j2\pi f)^{-1}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$ |
| 8. Convolution | $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - t')x_2(t')\,dt'$ | $X_1(f)X_2(f)$ |
| | $= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t')x_2(t - t')\,dt'$ | |
| 9. Multiplication | $x_1(t)x_2(t)$ | $\int_{-\infty}^{\infty} X_1(f - f')X_2(f')\,df'$ |
| | | $= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f')X_2(f - f')\,df'$ |

[a] $\omega_0 = 2\pi f_0$; $x(t)$ is assumed to be real in 3b.

## ÇIKARIMLAR:

- Fourier transformu:
  Fonksiyonun değişim hızı hakkında bilgi verir.

- Fourier transformu:
  Zaman domeninden, frekans domenine taşır.

Bu dönüşümler:

- Fonksiyon ile alakalı ek bilgiler verir.

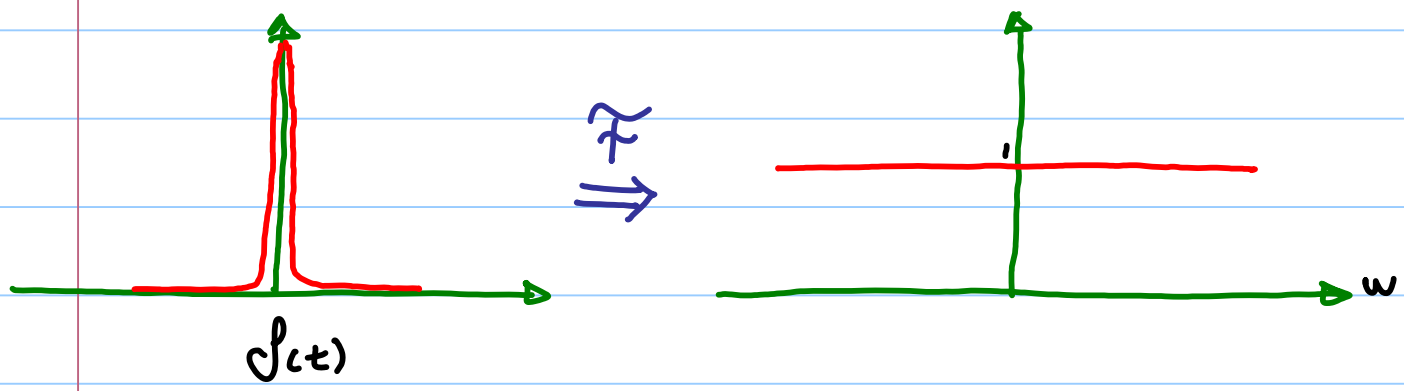
- İşlem kolaylığı sağlar.

↓

**MESELA:** Zaman domeninde $x(t) * h(t)$ konvolüsyonu (yani ikinci fonksiyonun y'ekseine göre tersini alıp, diğer fonksiyon ile çarpıp toplamak ) çok zor bir işlem iken:

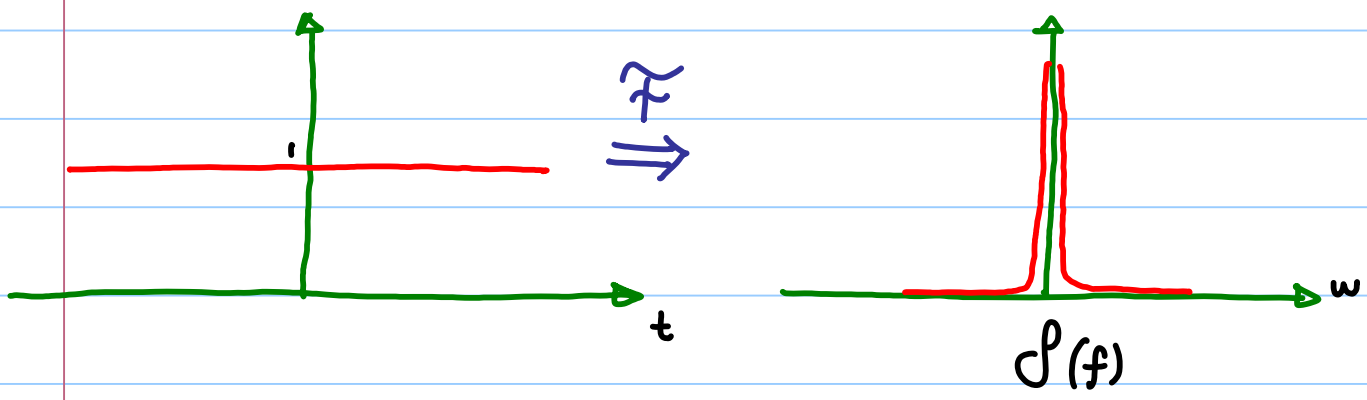
$x(t) * h(t) \Rightarrow X(f) . H(f)$ olurki;

çok kolay bir çarpım olur.

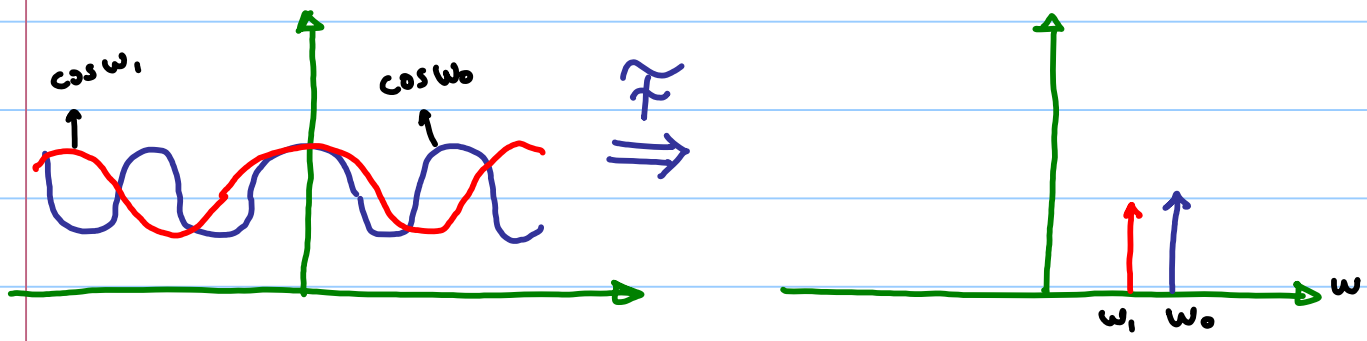



$\downarrow$

$0^-$ ve $0^+$ 'dan 0'a çok hızlı değişiyor $\infty$ oluyor, böylelikle frekans bandı $\infty$ oluyor.




Periyodu $\infty$ diye düşünürsek, işaret frekans domeninde $f = 0$'da $\infty$ olur.




w arttıkça 0'a doğru yaklaşır.

ok

$$\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right) = ?$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{(-1-i\omega)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-i\omega)} e^{(1-i\omega)t}\Big|_{t=-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi(-1-i\omega)} e^{(-1-i\omega)t}\Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-i\omega)} + \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

-02/

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = ?$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(w)$$

$$F(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-w)$$

Simetri özelliği

$$\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right) = \frac{1}{\pi(1+w^2)}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi(1+t^2)}\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-|-w|} = \frac{1}{2\pi} e^{-|w|}$$

ve lineer olma özelliğinden $\pi$ ile her iki tarafı çarpabiliyoruz $\Rightarrow$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{\pi}{2\pi} e^{-|w|} = \frac{1}{2} e^{-|w|}$$