

ANTIDERIVETIVES (TÜREV KARŞILIĞI)

$f(z)$ fonksiyonunun sabit z_1 noktasından sabit z_2 noktasına olan kontur integralinin değeri seçilen yola genelde bağlı olmasına rağmen bazı fonksiyonlar için z_1 den z_2 'ye olan integral yoldan bağımsızdır.

- Aşağıdaki teorem integrasyonun seçilen yola bağımlı olup olmadığını belirlemede faydalıdır.

TEOREM: Diyelim ki f D domaininde sürekli, Eğer aşağıdakilerden biri doğrudysa **HEPSİ** doğrudur.

- f D 'deki türev karşılığı (anti türevi) F mevcuttur.
- Tümü D içinde kalan Konturlar (z_1 sabit noktasından z_2 sabit noktasına uzanan) boyunca $f(z)$ 'nin integralleri aynı değere sahiptir.
- Tümü D içinde kalan Kapalı Konturlarda $f(z)$ 'nin integralinin değeri sıfırdır.

ör/ Sürekli fonksiyon $f(z) = z^2$ 'nin $F(z) = z^3/3$ antitürevi bütün kompleks düzlemde mevcuttur. Bununla,

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left. \frac{z^3}{3} \right|_0^{1+i} = \frac{1}{3} (1+i)^3 = \frac{2}{3} (-1+i)$$

ör/ $\frac{1}{z^2}$ fonksiyonu: orijin haricinde her yerde sürekli ve

$|z| > 0$ domeninde antitürevi vardır ve $-\frac{1}{z}$ 'ye eşittir.

Sonuç olarak:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0)$$

Bu problemde özel olarak eğer C çemberi:

$$z = r \cdot e^{i\theta} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \text{ ise}$$

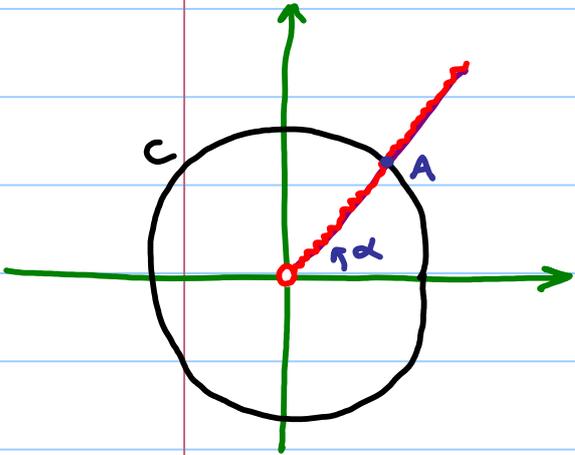
$$\int_C \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{r e^{-i\pi}} - \frac{1}{r e^{i\pi}} = \frac{1}{r} \cdot z_i \cdot \sin \pi = 0$$

ör/ $f(z) = \frac{1}{z}$:

Örnekteki örnekte $\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$ idi ancak $f(z) = \frac{1}{z}$

fonksiyonunun aynı çember boyunca ^{→ Kapalı Kontur} integrali aynı şekilde bulunamazdı çünkü :

$\log z$ 'nin dalı $F(z)$ 'nin türevi $\frac{1}{z}$ olmasına rağmen, $F(z)$ dal kesimi boyunca türevinin alınamamasının ötesinde tanımlı bile değildir.

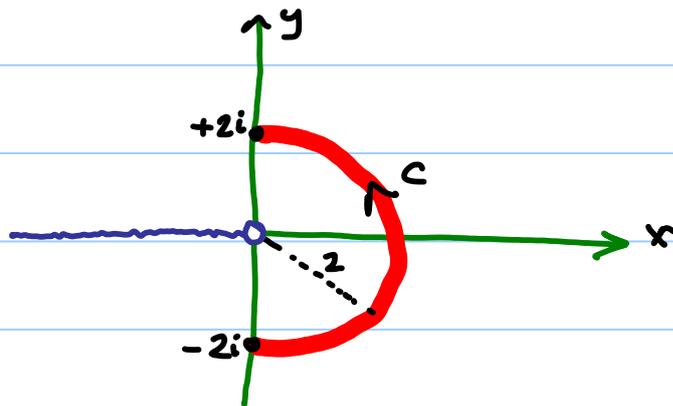


Diyeelim $\theta = \alpha$ $F(z)$ 'nin dal kesimi olsun, $F'(z)$ C ile $\theta = \alpha$ 'ın kesim noktasında mevcut değildir.

$F'(z) = \frac{1}{z}$ 'nin direkt integralini almak için kullanılacak D domaininde A noktası bulunmadığından, antitürevi direkt olarak kullanamayız.

$$z = 2 \cdot e^{i\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\int_C \frac{dz}{z} = ?$$



$\text{Log } z = \ln r + i\Phi$ ($r > 0$, $-\pi < \Phi < \pi$) olarak
esas dahi seçersek:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = \text{Log } z \Big|_{-2i}^{2i} = \text{Log}(2i) - \text{Log}(-2i)$$

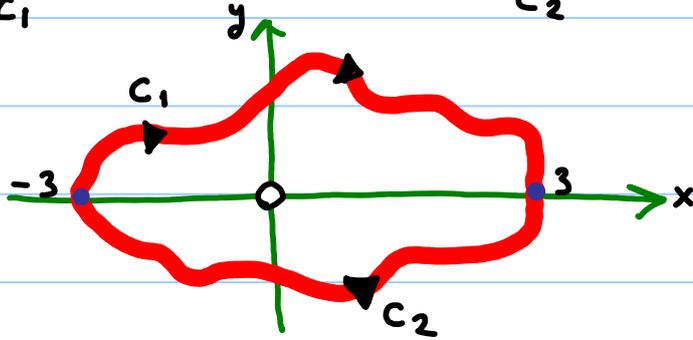
$$= \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2} \right) - \left(\ln 2 - i\frac{\pi}{2} \right) = \pi i$$

bu sonucu 'integral' dışında görmüştük!!!

04

$$\int_{C_1} z^{1/2} dz = ?$$

$$\int_{C_2} z^{1/2} dz = ?$$



C_1 için $z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ ($r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$) alalım

Integrali alınan fonksiyon parçaları süreklidir, bu yüzden integrali vardır; **FAKAT** almış olduğumuz dal (i) maddesi gereği $\theta = 0$ 'da $z = \pm 3$ te tanımlı değiliz yani bu noktalarda türev yok.

C_1 için $f_1(z) = z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ ($r > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$) olarak alalım.

Böylelikle C_1 de her yerde süreklidir. $f_1(z)$ 'in C_1 üzerindeki değerleri seçtiğimiz bir örneki dala $z = \pm 3$ dışında aynıdır.

$f_1(z)$ 'in anti türevi $F_1(z) = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} r \sqrt{r} e^{i3\theta/2}$
($r > 0$, $-\pi/2 < \theta < +3\pi/2$)

\Rightarrow

$$\int_{C_1} z^{1/2} dz = \int_{-3}^3 f_1(z) dz = F_1(z) \Big|_{-3}^3 = 2\sqrt{3} (e^{i0} - e^{i3\pi/2}) = 2\sqrt{3} (1+i)$$

İntegrali C_2 boyunca almak için integrali alınacak $z^{1/2}$ fonksiyonunu başka bir dala değiştirebiliriz.

$$f_2(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}) \text{ alabiliriz.}$$

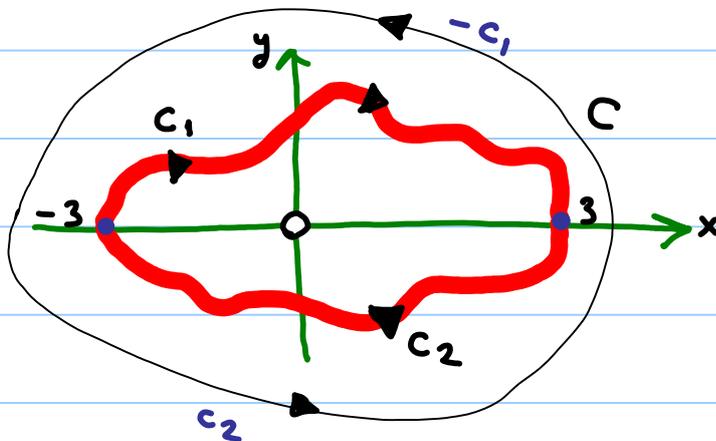
$$F_2(z) = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} r\sqrt{r} e^{i3\theta/2} \quad (r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2})$$

analitik fonksiyonu $f_2(z)$ 'nin anti türevidir.

Bu sebeple:

$$\int_{C_2} z^{1/2} dz = \int_{-3}^3 f_2(z) dz = F_2(z) \Big|_{-3}^3 = 2\sqrt{3} \left(e^{i3\frac{2\pi}{2}} - e^{i3\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= 2\sqrt{3} \left(e^{i3\pi} - e^{-i3\pi/2} \right) = 2\sqrt{3} (-1 + i)$$



C kontur integrali ise $C_2 - C_1$ kapalı kontur integralinin değeri $2\sqrt{3}(-1+i) - 2\sqrt{3}(1+i) = -4\sqrt{3}$

- CAUCHY-GOURSAT TEOREMİ -

Daha evvelki bölümde sürekli f fonksiyonunun D domeninde antitürevi olduğunda; tümü D içerisinde kalan kapalı C konturu etrafında $f(z)$ 'nin integralinin sıfır değerine sahip olduğunu görmüştük.

Bu bölümde: $f(z)$ 'nin basit kapalı kontur etrafında integralinin sıfır olmasını sağlayan şartları veren bir teoremi sunacağız.

- Bu teorem kompleks değışkuli fonksiyon teorisinin merkezidir.

C $z=z(t)$ ($a \leq t \leq b$) saat yönünün tersinde basit bir kapalı kontur olsun ve $f(z)$ 'nin C 'nin içindeki tüm noktalarda ve C üzerinde analitik bir fonk. olsun.

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$$

ve eğer $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ ve $z(t) = x(t) + i y(t)$

\Rightarrow

$$f[z(t)] = u[x(t), y(t)] + i v[x(t), y(t)]$$

$$z'(t) = x'(t) + i y'(t) \Rightarrow$$

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (vx' + uy') dt$$

$x' \cdot dt = \frac{dx}{dt} \cdot dt = dx$

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

ifadeyi çıkarımda alternatif olarak:

$$\int_C f(z) dz \text{ 'de } f(z) = u + iv \text{ ve } dz = dx + i dy$$

Yazarak yukarıdaki ifadeyi elde edebiliriz.

$$(u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

-GREEN'S TEOREMİ-

$P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ iki reel değerli fonksiyon olsun. Bunların birinci dereceden kısmi türevleri C kapalı konturu içerisinde kalan R bölgesinde sürekli ise Green teoremine göre:

$$\int_C (P dx + Q dy) = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy$$

Bu teoremi Stokes teoreminin bir özel hali olarak düşünebiliriz.

$$\vec{A}(x,y) = P(x,y) \vec{a}_x + Q(x,y) \vec{a}_y \quad \text{olsun.}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{ds} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \text{idi.}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_z & \vec{a}_y & \vec{a}_x \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \vec{a}_x \underbrace{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial z}}_{\downarrow 0} + \vec{a}_y \underbrace{\frac{\partial P(x,y)}{\partial z}}_{\downarrow 0} + \vec{a}_z \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right)$$

S xy düzleminde olduğuna göre $\vec{dS} = \vec{a}_z dx dy$
ve $\vec{dl} = \vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy$ ' dir.

0 zaman:

$$\int_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z dx dy = \iint_R (\Phi_x - P_y) dx dy$$

$$\text{ve } \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \oint_C (P \vec{a}_x + Q \vec{a}_y) (\vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy)$$

$$= \oint_C (P dx + Q dy)$$

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_R (\Phi_x - P_y) dx dy$$

olarak ispatlanmış olur.

Şimdi Green teoremi ışığında:

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

integratine bakalım.

$f(z)$ fonksiyonu C içinde kalan her noktada (R' 'de) analitik olduğundan süreklidir. Bu nedenle u ve v fonksiyonlarında süreklidir, ayrıca birinci dereceden kısmi türevlerde süreklidir.

Şimdi green teoremini bu integrale uygulayalım.

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

$$\int_C (P dx + Q dy) = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy \quad (\text{Green T. ile}) \Rightarrow$$

$$\int_C f(z) dz = \iint_R (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_R (u_x - v_y) dx dy$$

Şimdi Cauchy - Riemann denklemlerine göre:

$$u_x = v_y \quad \text{ve} \quad u_y = -v_x \quad \text{olmalıdır.}$$

$$\int_C f(z) dz = \iint_R (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_R (u_x - v_y) dx dy$$

\downarrow \downarrow
 $-v_x$ v_y

R üzerindeki çift katlı integraller sıfıra eşittir.

Öyleyse eğer $f(z)$ R' 'de analitik ve $f'(z)$ R' 'de sürekli ise

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \text{dır.}$$

Bu sonuç Cauchy tarafından 19. yüzyıl başlarında elde edilmiştir. Integral sonucu sıfır olduğundan yönden bağımsızdır:

$$\int_C f(z) dz = - \int_{-C} f(z) dz = 0$$

Goursat $f'(z)$ 'nin sürekli olması gerektiği şartının gerekmediğini ilk ispatlayandır.

Bu şartın gerekmediğinin ispatlanması çok önemlidir, örneğin bu sayede f analitik fonksiyonunun türevi f' 'nin analitik olduğunu f' 'nin sürekli olma şartını farzetmeden göstermeye yarar.

Cauchy'nin düzeltilmiş sonucu Cauchy - Goursat teoremi olarak bilinir.

TEOREM :

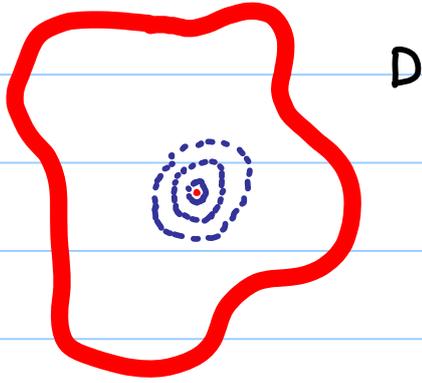
Eğer f bir basit kapalı C konturu üzerinde ve içindeki tüm noktalarda analitik ise:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

dir.

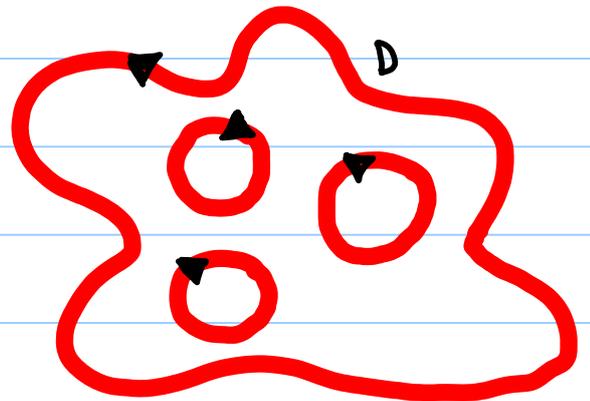
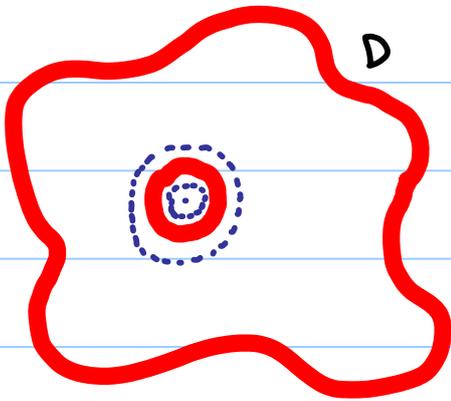
BASİT ve ÇOKLU BAĞLANTILI DOMENLER

Basit bağlantılı domen D içindeki her basit kapalı konturun sadece D 'nin noktalarını kapattığı konturdur. Yani bir D domenindeki her kapalı basit eğri; gittikçe küçülürken D domenini terk etmeden nokta haline gelir.



BASİT BAĞLANTILI DOMEN

Basit bağlantılı olmayan domene çoklu bağlantılı denir.



ÇOKLU BAĞLANTILI DOMENLER

Cauchy - Goursat teoremi takip eden şekilde basit bağlantılı domeni içerecek şekilde genişletilebilir.

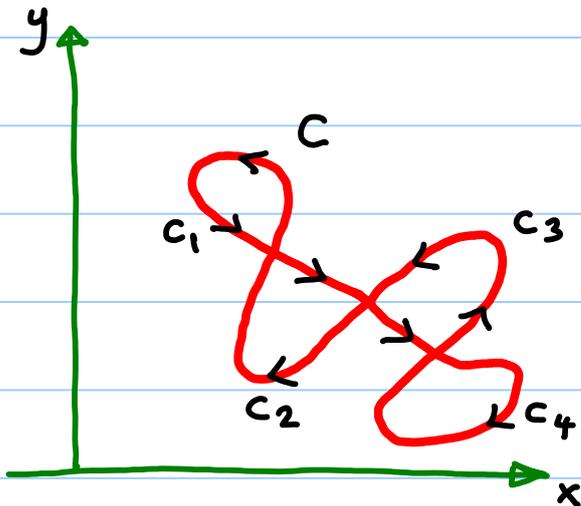
TEOREM 1 :

Eğer bir f fonksiyonu bir basit bağlantılı D domaininde analitik ise D içindeki her kapalı kontur C için:

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \star$$

İsbat:

C 'nin basit ve D içinde olması durumu için, f C üstündeki ve içindeki her noktada analitiktir, bu durumda Cauchy - Goursat teoremi \star 'ın doğruluğunu garantiler.



Eğer C bir basit kapalı kontur veya kendini sonlu sayıda kesen kapalı kontur ise basittir.

Ek olarak C kapalı ama kendini sonlu sayıda kesiyorsa, sonlu sayıda basit kapalı konturlar içeriyordur (Yukarıdaki şekil). $C-G$ teoremi bu basit kapalı konturlara uygularsak C için istenen sonuca ulaşırız.

Bir domenin basit bağlantılı olmasını engelleyen fonksiyonun analitik olmadığı Tekil noktalar dır.

• Eğer bir f fonksiyonu basit bağlantılı D domeninde analitik ise, mutlaka D 'de antitürevi vardır.

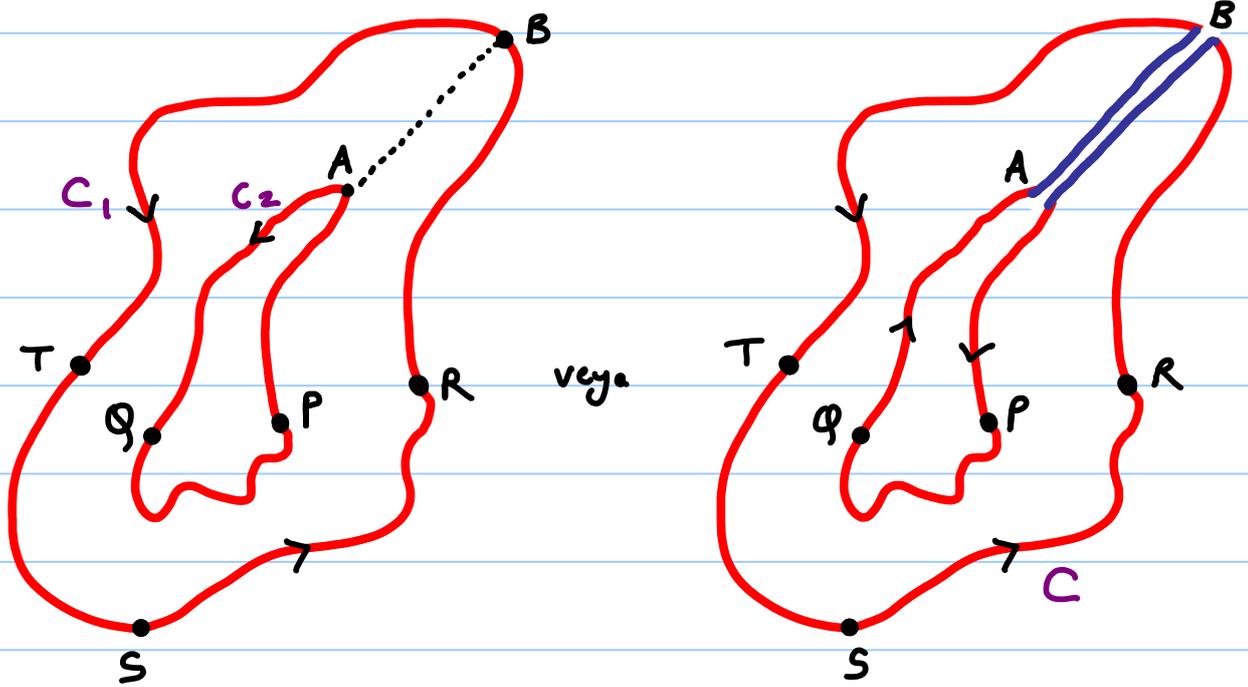
TEOREM 2 : Diyelim ki :

- C saat yönünün tersinde basit kapalı kontur.
- C_k ($k = 1, 2, \dots, n$) saat yönünde C 'nin içinde iç noktaları ortak nokta içermeyen sonlu sayıda basit kapalı konturlar,

Eğer f fonksiyonu C üzerinde ve içinde C_k içindeki noktalar hariç analitik bir fonksiyon ise:

$$\int_C f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0 \text{ dır.}$$

Başka bir deyişle çoklu bağlantılı bölgede analitik olan bir fonksiyonun bu bölgeyi dıştan çevreleyen eğri boyunca integrali, bölgeyi içten çevreleyen eğriler boyunca integrallerin toplamına eşittir.



$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (\text{C-G teoremi})$$

$$\oint_C f(z) dz = \int_{BTSRB} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz + \int_{APQA} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz = 0$$

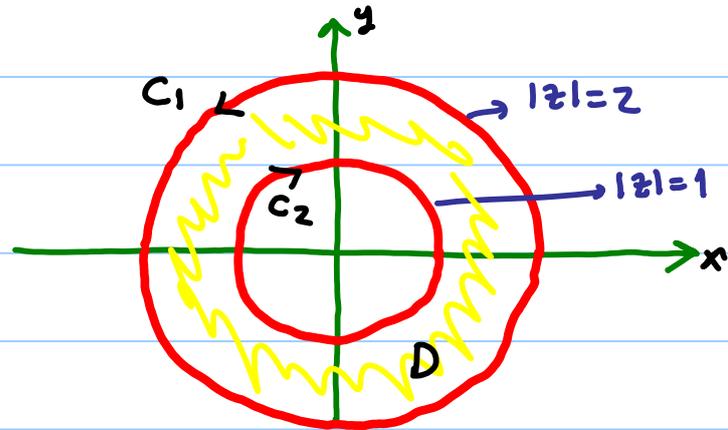
$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{-C_2} f(z) dz = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

öf

$C = C_1 + C_2$ için tanımlanan D domaininde

$$\int_C \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = ?$$



Integrali alınacak fonksiyon $z=0$ ve $z=\pm 3i$ noktaları haricinde analitik ve bu noktalar D dışında.

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = \int_{-C_2} \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = - \int_{C_2} \frac{dz}{z^2(z^2+9)} \Rightarrow$$

$$\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_C \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0 \text{ olur.}$$

- CAUCHY INTEGRAL FORMÜLLERİ -

Bir analitik fonksiyonun analitik olduğu bölgenin içindeki herhangi bir noktadaki fonksiyonun alacağı değer ve aynı fonksiyonun bütün türevlerinin alacağı değerler bölgeyi sınırlayan C basit kapalı konturu üzerinde fonksiyonun integralinden yararlanılarak hesaplanabilir.

TEOREM 1: f pozitif yönde alınan C basit kapalı konturunun içindeki bütün noktalar için analitik ise, ve z_0 C içinde herhangi bir nokta ise:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad \text{veya} \quad \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

olur.

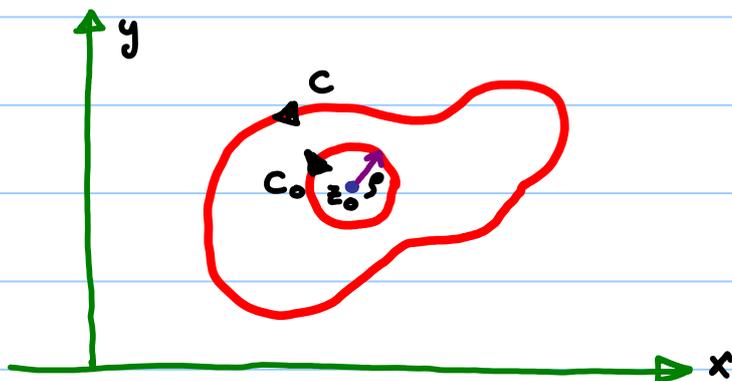
İSBAT:

f z_0 civarında sürekli olduğunda,

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ve $|z - z_0| < \delta$ olan ε ve δ gibi iki küçük pozitif sayı bulunabilmelidir.

ρ , ρ' den küçük bir sayı olmak üzere

$C_0 : |z - z_0| = \rho$ olan C bölgesinin içinde pozitif yönde tanımlı bir kontur alalım.



C ve C_0 arasındaki bölgede Cauchy - teoremi gereği

analitik $\frac{f(z)}{z - z_0}$ fonksiyonu için:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{ya da bilirikiz.}$$

\Rightarrow

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \underbrace{f(z_0)}_{\text{Sabit}} \oint_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

her iki taraftan bu ifade çıkarılıyor!!!

$$\oint_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = ? \quad z = z_0 + \rho e^{i\theta}, \quad dz = \rho \cdot i \cdot e^{i\theta} \cdot d\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\oint_{C_0} \frac{\rho \cdot i \cdot e^{i\theta} \cdot d\theta}{z_0 + \rho e^{i\theta} - z_0} = \int_{C_0} i \cdot d\theta = i \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz$$

$$\left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| < \int_{C_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z-z_0|} |dz| \leq \varepsilon \cdot 2\pi$$

$$\left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| < 2\pi \varepsilon \quad \text{dolayısıyla } \Rightarrow$$

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi \varepsilon \quad \text{olur ve}$$

eşitsizliğin sol tarafı negatif olmayan bir sabit olduğuna göre istenilen küçük sayıların varlığını gösterir.

Bu durum ise 1. Teoremi ispatlamış olur.

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

TEOREM 2:

Eğer bir fonksiyon bir noktada analitik ise, bütün mertebeden türevlülükte söz konusu noktada analitiktir.

O halde $z = z_0$ noktasındaki n . dereceden $f(z)$ fonksiyonunun türesi:

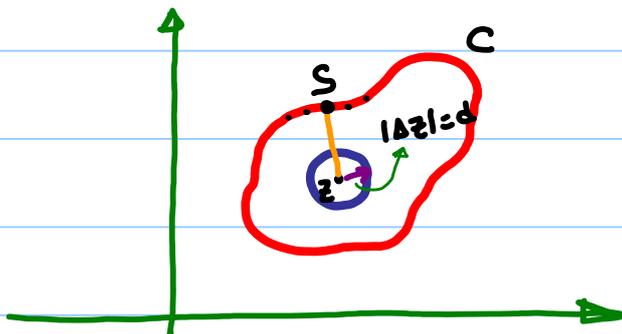
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad n=1,2,3,\dots$$

- 1. Teorem 2. Teoremin özel hali olarak düşünülebilir.

İSBAT :

f pozitif yönde tanımlı basit kapalı C konturu içinde analitiktir. z C 'nin içinde herhangi bir nokta ve S ise C 'nin üzerindeki noktaları göstermek üzere 2. İntegral formülünü $n=1$ için ispatlayalım.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds \text{ olduğunu gösterelim!}$$



$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \text{ ' dir.}$$

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{f(s)}{s-(z+\Delta z)} - \frac{f(s)}{s-z} \right] ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) \cdot ds}{(s-z-\Delta z) \cdot (s-z)}$$

$0 < |\Delta z| < d$ d burada z ile S arasındaki en kısa mesafedir.

$$\text{Böylelikle } |\Delta z| \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) \cdot ds}{(s-z-\Delta z) \cdot (s-z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) \cdot ds}{(s-z)^2}$$

yakınlaşır.

Bu tür şekilde diğer türev dereceleride ispatlanabilir.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) \cdot ds}{(s-z)^{n+1}} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

ÖRNEKLER:

$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = ?$ C : basit kapalı kontur ve z_0 C içinde kalan bir nokta ise.

$\int_C \frac{1 \cdot dz}{z-z_0}$ olarak düşünelim:

$f(z) = 1 \Rightarrow f(z_0) = 1$

$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$ idi.

$\int_C \frac{1}{z-z_0} \cdot dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$ olur.

$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = ?$ C : basit kapalı kontur ve z_0 C içinde kalan bir nokta ise.
($n = 1, 2, 3, \dots$)

$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot dz$

$\int_C \frac{1 \cdot dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ alırsak $f(z) = 1 \Rightarrow f'(z_0) = 0$

$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = 0$ olur.

~~ör~~ $C: |z|=2$ 'de pozitif yönde tanımlı olsun.

$$\int_C \frac{z \cdot dz}{(9-z^2)(z+i)} = ?$$

$f(z) = \frac{z}{9-z^2}$ ise $z_0 = -i$ bir iç nokta olmak üzere

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z-z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0) \Rightarrow$$

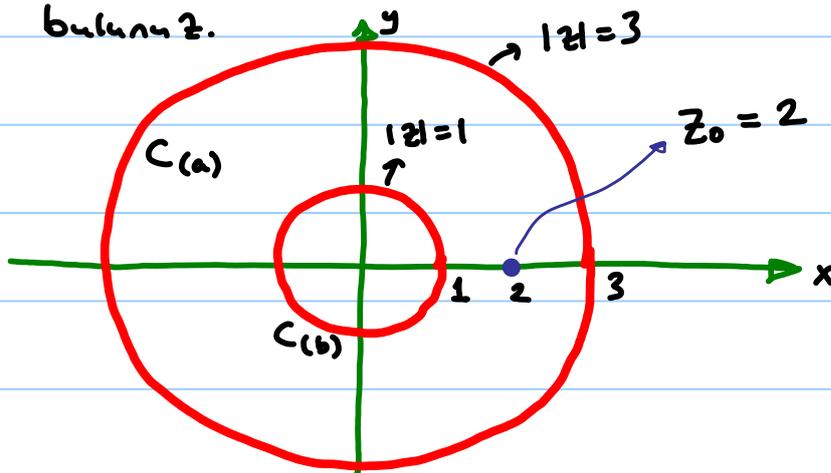
$$\int_C \frac{z \cdot dz}{(9-z^2)(z+i)} = 2\pi i \cdot f(z=-i) = 2\pi i \cdot \left(\frac{-i}{10} \right) = \frac{2\pi}{5}$$

~~ör~~ $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz = ?$

a) $C: |z|=3$

b) $C: |z|=1$

için bulunuz.



$$(a) \left. \begin{array}{l} f(z) = e^z \\ z_0 = 2 \end{array} \right\} z_0 \text{ C'nin içinde.}$$

$$f(z_0) = f(z) = e^2$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz = f(z_0) = e^2 \text{ olur.}$$

(b) C. G. teoreminden D' de analitik (z_0 C'nin dışında)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz = 0 \text{ integrali basit kapalı konturunda sıfırdır.}$$

if/

$$\int_C \frac{\sin 3z}{z + \frac{\pi}{2}} dz = ? \quad C: |z| = 5$$

$$f(z) = \sin 3z$$

$$z_0 = -\frac{\pi}{2} \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

kontur içinde

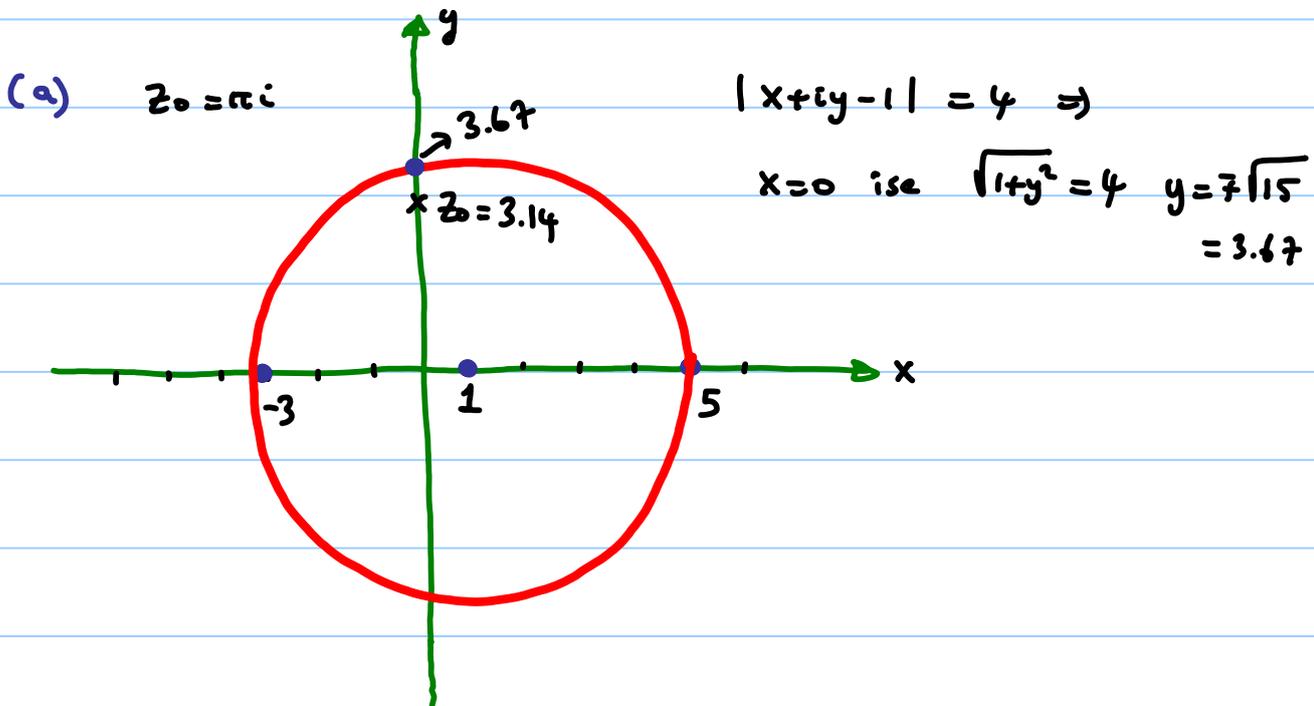
$$\int_C \frac{\sin 3z}{z + \frac{\pi}{2}} dz = 2\pi i \cdot f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i \text{ olur.}$$

~~sol~~

$$\int_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz = ?$$

(a) $C: |z-1| = 4$

(b) $C: |z-2| + |z+2| = 6$



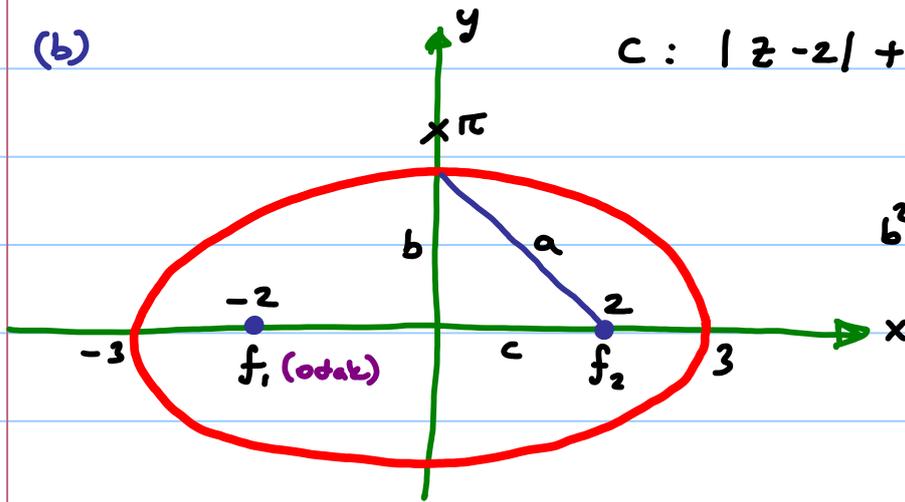
z_0 Kontur içinde kalıyor \Rightarrow

$$f(z) = e^{3z} \quad f(z_0) = e^{3\pi i} = -1$$

$\cos 3\pi + i \sin 3\pi$

$$\int \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz = 2\pi i \cdot f(z_0) = -2\pi i$$

(b)



$$c: |z-2| + |z+2| = 6 = 2a$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b = \sqrt{5} < \pi$$

$$\int_c \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz = 0 \quad \text{olur.}$$