SORU : Afin uzayda bir nokta P olmak üzere $\overrightarrow{PP}=\vec{0}$ old. gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Hatırlatma : $A\neq\emptyset$ bir küme ve V bir vektör uzayı olsun.

$f: A\times A \longrightarrow V$ fonksiyonu
$(P, Q) \longrightarrow f(P,Q)=\overrightarrow{PQ}\in V$

A1) $\forall P,Q,R\in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$

A2) $\forall P\in A$ ve $\forall \alpha\in V$ için $f(P,Q)=\overrightarrow{PQ}=\alpha$ o.ş bir tek $Q\in A$ vardır.

A1 ve A2 özelliklerini sağlıyorsa A ya V vektör uzayı ile birleşen Afin uzay denir.

A1 aksiyomu gereğince $\forall P,Q,R\in A$ için $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$ yazılabilir.

$P=Q=R$ seçelim. $\overrightarrow{PP}+\overrightarrow{PP}=\overrightarrow{PP}$

$\overrightarrow{PP}=\vec{0}$ yazılır.

Soru : $\varphi : E^2 \to E^2$

$$\varphi(u,v) = (ue^v + v,\; u.e^v - v)$$

verilsin. φ bir C^∞ - diffeomorfizmdir, gösteriniz.

Hatırlatma : U ve V, E^n de iki açık alt küme olsun.

$\phi : U \to V$ için

- $\phi \in C^k(U,V)$
- ϕ^{-1} var ve $\phi^{-1} \in C^k(V,U)$

özellikleri sağlanıyorsa ϕ ye C^k - diffeomorfizm denir.

Çözüm :

* φ, C^∞ sınıfından mı?

φ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\varphi(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$

olmak üzere f_1 ve f_2 dif bilir ise φ dif bilirdir.

$f_1(u,v) = ue^v + v$

$f_2(u,v) = ue^v - v$

olmak üzere

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = e^v, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = ue^v + 1, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial v} = e^v, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2} = ue^v, \ldots$$

$\frac{\partial f_2}{\partial u} = e^v$, $\frac{\partial f_2}{\partial v} = ue^v - 1$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial u \partial v} = e^v$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2} = ue^v$, ---

türevleri mevcut ve sürekli olduğundan $\varphi \in C^\infty(E^2, E^2)$ dir.

* φ 1-1 mi?

$\forall (u_1, v_1)(u_2, v_2) \in E^2$ için $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \overset{?}{\Rightarrow} (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \Rightarrow (u_1 e^{v_1} + v_1,\ u_1 e^{v_1} - v_1) = (u_2 e^{v_2} + v_2,\ u_2 e^{v_2} - v_2)$$

$$\Rightarrow u_1 e^{v_1} + v_1 = u_2 e^{v_2} + v_2$$
$$u_1 e^{v_1} - v_1 = u_2 e^{v_2} - v_2$$

Taraf tarafa çıkarılırsa

$\Rightarrow v_1 = v_2$ ve $u_1 = u_2$ bulunur. Buradan φ 1-1 dir.

* φ örten mi?

$\forall (x, y) \in E^2$ için $\varphi(u, v) = (x, y)$ o.ş $(u, v) \in E^2$ var mıdır?

$$\varphi(u, v) = (ue^v + v,\ ue^v - v) = (x, y) \Rightarrow \begin{aligned} ue^v + v &= x \\ ue^v - v &= y \end{aligned}$$

Buradan $ue^v = \frac{x+y}{2}$ ve $v = \frac{x-y}{2}$ old.

$$u = \left(\frac{x+y}{2}\right) e^{\left(\frac{y-x}{2}\right)}$$ bulunur.

φ, 1-1 ve örten old. tersi vardır ve

$$\varphi^{-1}(x,y) = (u,v) = \left(\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{\left(\frac{y-x}{2}\right)}, \frac{x-y}{2}\right)$$ bulunur.

* φ^{-1} C^{∞}-sınıfından mı?

$\varphi^{-1}(x,y) = \left(g_1^{-1}(x,y), g_2^{-1}(x,y)\right)$ ol. üzere

$g_1^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}\right) e^{\left(\frac{y-x}{2}\right)}$ ve $g_2^{-1}(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}\right)$ koordinat fonksiyonlarının

her mertebeden türevleri var ve sürekli olmalıdır.

$$\frac{\partial g_1^{-1}}{\partial x} = \left(\frac{2-x-y}{4}\right) e^{\frac{y-x}{2}}, \quad \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y} = \left(\frac{2+x+y}{4}\right) e^{\frac{y-x}{2}}, \quad \frac{\partial^2 g_1^{-1}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{-x-y}{8}\right) e^{\frac{y-x}{2}}, \quad \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = \left(\frac{x+y+4}{8}\right) e^{\frac{y-x}{2}}, \ldots$$

$$\frac{\partial g_2^{-1}}{\partial x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 g_2^{-1}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 g_2^{-1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_2^{-1}}{\partial y^2} = 0, \ldots$$

türevleri mevcut ve sürekli olduğundan $\varphi^{-1} \in C^{\infty}(E^2, E^2)$ bulunur.

Yani φ bir C^{∞}-diffeomorfizmdir.

Soru : $\vec{v}=(-1,1,4)$, $\vec{u}=(0,1,-1)\in\mathbb{R}^3$ vektörleri veriliyor. $P=(1,0,1)$ olmak üzere $3\vec{v}_P+5\vec{u}_P$ vektörünü $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P\right\}$ bazına göre ifade ediniz.

$$\vec{v}_P=(P,\vec{v}) \qquad \vec{u}_P=(P,\vec{u})$$

$$3\vec{v}_P+5\vec{u}_P = 3\left(P,(-1,1,4)\right)+5\left(P,(0,1,-1)\right)$$

$$=\left(P,(-3,3,12)\right)+\left(P,(0,5,-5)\right)$$

$$=\left(P,(-3,8,7)\right)$$

$$=(-3,8,7)_P$$

$$=-3\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P+8\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P+7\frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P$$

<u>Soru</u>: $P=(-2,-1,1)\in E^3$, $\vec{v}=(0,3,-1)\in\mathbb{R}^3$ ve

$$f: E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 x_2^2 x_3$$

fonksiyonu için $\vec{V}_P[f]$ reel sayısını bulunuz.

<u>Çözüm</u>: $$V_P[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P$$

$$= v_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_P + v_2 \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_P + v_3 \left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_P$$

$$= 0.\left.(3x_1^2x_2^2x_3)\right|_P + 3.\left.(2x_1^3x_2x_3)\right|_P - 1.\left.(x_1^3x_2^2)\right|_P$$

$$= 0 + 3(2.(-2)^3(-1).1) - ((-2)^3.(-1)^2)$$

$$= 3.16 - (-8) = 48+8 = \underline{\underline{56}}$$

Soru: $\chi(E^3)$ vektör alanlarının kümesi, E^3 de $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinat sistemi veriliyor. $X, Y \in \chi(E^3)$ olmak üzere

$$X = x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$Y = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

ve $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ veriliyor

a) $X[f]$

b) $Y[f]$

c) $X[X[f]]$

d) $X[X[Y[f]]]$

fonksiyonlarını bulunuz.

a) $X[f] = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $a_1 = x_1 x_2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -x_2$

$$= a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

$$= x_1 x_2 (x_2 x_3) + 0 \cdot x_1 x_3 + (-x_2) x_1 x_2$$

$$= x_1 x_2^2 x_3 - x_1 x_2^2$$

b) $Y[f] = \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $b_1 = x_3$, $b_2 = x_1^2$, $b_3 = 0$

$$= b_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

$$= x_3 (x_2 x_3) + x_1^2 (x_1 x_3) + 0.(x_1 x_2)$$

$$= x_2 x_3^2 + x_1^3 x_3$$

c) $X[X[f]] = ?$

$X[f] = x_1 x_2^2 x_3 - x_1 x_2^2 = h$ diyelim.

$X[h] = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$, $a_1 = x_1 x_2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -x_2$

$$= a_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial h}{\partial x_3}$$

$$= x_1 x_2 (x_2^2 x_3 - x_2^2) + 0 + (-x_2) x_1 x_2^2$$

$$= x_1 x_2^3 x_3 - x_1 x_2^3 - x_1 x_2^3$$

$X[X[f]] = x_1 x_2^3 x_3 - 2 x_1 x_2^3$

d) $X[X[Y[f]]] = ?$

$Y[f] = x_2 x_3^2 + x_1^3 x_3 = h$ diyelim.

$X[X[h]] = ?$

$$X[h] = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad , \quad a_1 = x_1 x_2 \, , \; a_2 = 0, \; a_3 = -x_2$$

$$= a_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial h}{\partial x_3}$$

$$= x_1 x_2 (3x_1^2 x_3) + 0 + (-x_2)(2x_2 x_3 + x_1^3)$$

$$= 3x_1^3 x_2 x_3 - 2x_2^2 x_3 - x_1^3 x_2$$

$X[h] = 3x_1^3 x_2 x_3 - 2x_2^2 x_3 - x_1^3 x_2 = g$ diyelim

$$X[g] = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$= x_1 x_2 (9x_1^2 x_2 x_3 - 3x_1^2 x_2) + 0 + (-x_2)(3x_1^3 x_2 x_3 - 2x_2^2)$$

$$= 9x_1^3 x_2^2 x_3 - 3x_1^3 x_2^2 - 3x_1^3 x_2^2 x_3 + 2x_2^3$$

$$\Rightarrow X[X[Y[f]]] = 6x_1^3 x_2^2 x_3 - 3x_1^3 x_2^2 + 2x_2^3$$

Soru: $V = y^2 \frac{\partial}{\partial x} + (3z + x^2)\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$

$\in \mathcal{X}(E^3)$ vektör alanları veriliyor.

$W = (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (z+5)\frac{\partial}{\partial y} + x^2y\frac{\partial}{\partial z}$

a) $D_V W = ?$

b) $P = (1,0,2) \in E^3$ için $D_{V_P} W = ?$

Çözüm:

a) $D_V W = (V[w_1], V[w_2], V[w_3])$

$w_1 = x^2+y^2 \qquad v_1 = y^2$

$w_2 = z+5 \qquad v_2 = 3z+x^2$

$w_3 = x^2y \qquad v_3 = x$

• $V[w_1] = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial w_1}{\partial x_i} = v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial w_1}{\partial z}$

$= y^2(2x) + (3z+x^2)(2y) + x.0$

$= 2xy^2 + 6yz + 2x^2y$

• $V[w_2] = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial w_2}{\partial x_i} = v_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial w_2}{\partial z}$

$= y^2.0 + (3z+x^2).0 + x.1$

$= x$

$$\bullet V[w_3] = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial w_3}{\partial x_i} = v_1 \frac{\partial w_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial z}$$

$$= y^2 \cdot 2xy + (3z + x^2) \cdot x^2 + x \cdot 0$$

$$= 2xy^3 + 3x^2 z + x^4$$

$$D_V W = \left(2xy^2 + 6yz + 2x^2 y \ , \ x, \ 2xy^3 + 3x^2 z + x^4\right)$$

b) $p = (1, 0, 2) \in E^3$ için $D_{V_p} W = ?$

$$D_{V_p} W = \left(D_V W\right)\big|_p$$

$$= \left(2xy^2 + 6yz + 2x^2 y \ , \ x, \ 2xy^3 + 3x^2 z + x^4\right)\big|_p$$

$$= (0, 1, 7)\big|_p$$

SORU: $P=(2,1,-3)$ noktası ve $f(x,y,z)=x^3+y^2+z$ fonk. veriliyor.

$\left(D_{\nabla f}\nabla f\right)(P)$ kovaryant türevini tanımı kullanarak bulunuz.

Çözüm: $(D_v w)(p) = D_{\vec{v}_p} W = \frac{dW}{dt}(p+t\vec{v})\Big|_{t=0}$ olduğunu biliyoruz.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= 3x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{olduğundan}$$

$$\nabla f(P) = 12\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + 2\frac{\partial}{\partial y}\Big|_P + \frac{\partial}{\partial z}\Big|_P = (12,2,1)_P$$

$$\left(D_{\nabla f}\nabla f\right)(P) = D_{\nabla f|_P}\nabla f = \frac{d}{dt}\nabla f\,(p+t\,\nabla f)\Big|_{t=0} \quad --- \; (*)$$

$$p+t\nabla f = (2+12t,\, 1+2t,\, -3+t)$$

$$\nabla f(p+t\nabla f) = 3.(2+12t)^2\frac{\partial}{\partial x}(p+t\nabla f) + 2(1+2t)\frac{\partial}{\partial y}(p+t\nabla f) + \frac{\partial}{\partial z}(p+t\nabla f)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\nabla f(p+t\nabla f) = 3.2.(2+12t).12\frac{\partial}{\partial x}(p+t\nabla f) + 4\frac{d}{dy}(p+t\nabla f) + 0$$

olduğundan (*) dan

$$\left(D_{\nabla f}\nabla f\right)(P) = 144\frac{\partial}{\partial x}\Big|_P + 4\frac{d}{dy}\Big|_P = (144,4,0)_P \quad \text{bulunur.}$$

Soru : $\vec{v} = (-1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ ve $P = (1, 3, -2) \in E^3$ olmak üzere, $\vec{v}_P$ tanjant vektörü veriliyor. E^3 ün Öklid koordinat sistemi $\{x_1, x_2, x_3\}$ olduğuna göre aşağıda verilen diferansiyel formlar için $W(P)(v_P)$ değerini hesaplayınız.

a) $W = x_2^2 dx_1$

b) $W = dx_1$

c) $W = (x_3+1)\, dx_1 + x_1^2 dx_3$

a) $W(P) = (x_2^2 dx_1)(P)$ $\qquad P = (1, 3, -2) \Rightarrow x_1(P) = 1,\ x_2(P) = 3,\ x_3(P) = -2$

$= x_2^2(P)\, dx_1|_P$

$= 9\, dx_1|_P$

$W(P)(\vec{v}_P) = (9\, dx_1|_P)(\vec{v}_P)$

$= 9\, \underbrace{dx_1|_P(v_P)}$

$= 9\, v_P[x_1] = 9\, v_1$

$= 9.(-1) = -9$

Hatırlatma: $dx_i(V) = V[x_i] = f_i$

$V = \sum f_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^3)$

b) $W(P) = dx_1(P)$

$= dx_1|_P$

$W(P)(\vec{v}_P) = (dx_1|_P)(v_P)$

$= dx_1|_P\, v_P = v_P[x_1] = v_1 = -1$

c) $W(P) = \left((x_3+1)dx_1 + x_1^2 dx_3\right)(P)$

$$= (x_3(P)+1)\, dx_1\big|_P + x_1^2(P)\, dx_3\big|_P$$

$$= (-2+1)\, dx_1\big|_P + 1 \cdot dx_3\big|_P$$

$$= -\, dx_1\big|_P + dx_3\big|_P$$

$$W(P)(\vec{v_P}) = \left(-\, dx_1\big|_P + dx_3\big|_P\right)(\vec{v_P})$$

$$= -\, dx_1\big|_P(\vec{v_P}) + dx_3\big|_P(\vec{v_P})$$

$$= -\, v_P[x_1] + v_P[x_3]$$

$$= -v_1 + v_3 = -(-1) + 2 = 3$$

SORU: $\forall X \in \chi(E^3)$ için

$$div(rot(X)) = 0 \in C(E^3, \mathbb{R})$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $X = \sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^3)$ ol. üzere

$$rot(X) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

yazılır.

$div(rot(X)) = \langle \nabla, rot(X) \rangle$ olduğundan

$$div(rot(X)) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2}$$

$$= 0$$

dır.

! Burada $f \in C^\infty$ old. $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_i}$ $1 \leq i, j \leq 3$ dür.

Soru: $\forall X \in \chi(E^3)$ ve $\forall f \in C^\infty(E^3, \mathbb{R})$ için

$$rot(fX) = f\, rot X + \nabla f \wedge X$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $X = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^3)$ ve $f \in C^\infty(E^3, \mathbb{R})$ için

$$rot(fX) = rot\left(\sum_{i=1}^{3} (f a_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial(fa_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(fa_2)}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial(fa_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(fa_3)}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$+ \left(\frac{\partial(fa_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(fa_1)}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} a_3 + f\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_3} a_2 - f\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} a_1 + f\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_1} a_3 - f\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} a_2 + f\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} a_1 - f\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$= f\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + f\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + f\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} a_3 - \frac{\partial f}{\partial x_3} a_2\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} a_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1} a_3\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} a_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2} a_1\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

Diger taraftan

$$\nabla f \wedge X = \begin{vmatrix} i & J & k \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} a_3 - \frac{\partial f}{\partial x_3} a_2 \,,\, \frac{\partial f}{\partial x_3} a_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1} a_3 \,,\, \frac{\partial f}{\partial x_1} a_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2} a_1\right)$$

dir.

Buna göre

$$rot(fX) = f\, rot(X) + \nabla f \wedge X$$

elde edilir.

SORU : E^3 Öklid uzayında $\vec{v}_p = (1,-2,0) \in T_{E^3}(P)$ tanjant vektörü,

$p = (1,2,-1) \in E^3$ noktası,

$$W = x_1^2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \in \chi(E^3) \text{ vektör alanı,}$$

$$\phi = x_3\, dx_1 - x_1^2 x_2\, dx_2 + x_1^3 dx_3 \in \chi^*(E^3) \text{ 1-formu ve}$$

$f : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2^3 - x_3^2$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre

a) $\phi(W)$

b) $df(V_p)$

c) $\vec{V}_p(\operatorname{div} W)$

d) $\langle W, \operatorname{grad} f \rangle$

e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} W)$

f) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$

değerlerini hesaplayınız.

a) $\phi(W) = (x_3\, dx_1 - x_1^2 x_2\, dx_2 + x_1^3 dx_3)(W)$

$$= x_3 \underbrace{dx_1(W)}_{W[x_1]=w_1} - x_1^2 x_2 \underbrace{dx_2(W)}_{W[x_2]=w_2} + x_1^3 \underbrace{dx_3(W)}_{W[x_3]=w_3}$$

$$= x_3 w_1 - x_1^2 x_2 w_2 + x_1^3 w_3$$

$$= x_3(x_1^2 x_2) - x_1^2 x_2 (x_1 x_2 x_3) + x_1^3(-x_2 x_3)$$

$$= x_1^2 x_2 x_3 - x_1^3 x_2^2 x_3 - x_1^3 x_2 x_3$$

b) $df(V_p) = V_p[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p$

$$= v_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p + v_3 \left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_p$$

$$= 1.(x_2^3)(p) - 2.(3x_1x_2^2)(p) + 0$$

$$= (x_2(p))^3 - 6\,x_1(p)\,(x_2(p))^2$$

$$= 2^3 - 6.1.4 = 8 - 24 = -16$$

c) $\vec{V_p}(\operatorname{div} W) = ?$

$\operatorname{div} W = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$

$w_1 = x_1^2 x_2$
$w_2 = x_1 x_2 x_3$
$w_3 = -x_2 x_3$

$\operatorname{div} W = 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2 = h$ diyelim

$V_p[h] = \sum_{i=1}^{3} v_i \left.\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|_p$

$$= v_1 \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|_p + v_3 \left.\frac{\partial h}{\partial x_3}\right|_p$$

$$= 1.(2x_2 + x_3)\big|_p - 2(2x_1 - 1)\big|_p + 0$$

$$= 1.(2\,x_2(p) + x_3(p)) - 2(2x_1(p) - 1)$$

$$= (2.2 - 1) - 2(2.1 - 1) = 3 - 2 = 1$$

d) $\langle W, \operatorname{grad} f \rangle = ?$

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= (x_2^3,\ 3x_1x_2^2, -2x_3)$$

$$\langle W, \operatorname{grad} f \rangle = \langle (x_1^2x_2, x_1x_2x_3, -x_2x_3), (x_2^3, 3x_1x_2^2, -2x_3) \rangle$$

$$= x_1^2x_2^4 + 3x_1^2x_2^3x_3 + 2x_2x_3^2$$

e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} W) = ?$

$$\operatorname{rot} W = \nabla \times W = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1^2x_2 & x_1x_2x_3 & -x_2x_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(-x_2x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(x_1x_2x_3)}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$+ \left(\frac{\partial(x_1^2x_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(-x_2x_3)}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$+ \left(\frac{\partial(x_1x_2x_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial(x_1^2x_2)}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$\Rightarrow \text{rot}\, W = (-x_3 - x_1 x_2\ , 0\ , x_2 x_3 - x_1^2) = h$ diyelim

$\text{div}(\text{rot}\, W) = \text{div}(h)$

$h = \sum_{i=1}^{3} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ol. üzere $h_1 = -x_3 - x_1 x_2\ , h_2 = 0\ , h_3 = x_2 x_3 - x_1^2$

$$\text{div}(\text{rot}\, W) = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \frac{\partial h_3}{\partial x_3}$$

$$= -x_2 + 0 + x_2 = 0$$

f) (d) şıkkından $\text{grad} f = (x_2^3\ , 3x_1 x_2^2, -2x_3)$ olduğundan

$$\text{rot}(\text{grad} f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2^3 & 3x_1 x_2^2 & -2x_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(-2x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(3x_1 x_2^2)}{\partial x_3}, \frac{\partial(x_2^3)}{\partial x_3} - \frac{\partial(-2x_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial(3x_1 x_2^2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(x_2^3)}{\partial x_3} \right)$$

$$= (0, 0, 0)$$

$$= \vec{0}$$

SORU : $F: E^3 \to E^3$ dönüşümü $F(x,y,z) = (x+2y, x^2 - 2yz, 2x^3)$

olarak tanımlanıyor.

a) $\vec{v} = (2,-3,0) \in \mathbb{R}^3$ ve $P = (1,1,1) \in E^3$ için $F_*|_P(\vec{v}_P)$ türev dönüşümünü bulunuz.

b) F dönüşümü altında $\alpha : I \to E^3$, $\alpha(t) = (\sin 2t, \sin t, 1)$ eğrisinin resmini

ve $F_*(\alpha'(0))$ tanjant vektörünü bulunuz.

Çözüm: a) $$J(F,P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}_P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2x & -2z & -2y \\ 6x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_*|_P(V_P) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}_{F(P)}$$

bulunur.

b) $F(\alpha(t)) = (\sin 2t + 2\sin t,\ \sin^2 2t - 2\sin t,\ 2\sin^3 2t)$

$\beta(t) = F(\alpha(t))$

$\beta'(t) = F_*(\alpha'(t))$

$\beta'(t) = (2\cos 2t + 2\cos t,\ 2\sin 2t . 2 . \cos 2t - 2\cos t,\ 6\sin^2 2t . 2 . \cos 2t)$

$\beta'(0) = (2+2, 0-2, 0)$

$\beta'(0) = (4, -2, 0)$

yani

$F_*(\alpha'(0)) = (4, -2, 0)$

olarak bulunur.

Soru: $F: E^n \to E^m$ ve $G: E^m \to E^p$ iki dönüşüm olsun.

$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall \vec{v}_p \in T_{E^n}(p)$ ve $g \in C^\infty(E^p, \mathbb{R})$ için

$$\left[G \circ F_*|_p(\vec{v}_p)\right](g) = \vec{v}_p\left(g \circ (G \circ F)\right)$$

$$= \vec{v}_p\left((g \circ G) \circ F\right)$$

$$= F_*|_p \, \vec{v}_p(g \circ G)$$

$$= \left[G_*|_p (F_*|_p)(\vec{v}_p)\right](g)$$

dir. $\forall \vec{v}_p \in T_{E^n}(p)$ ve $g \in C^\infty(E^p, \mathbb{R})$ için

$$(G \circ F)_*|_p = G_*|_p \, F_*|_p = (G_* \circ F_*)|_p$$

$$\xRightarrow{\forall p \in E^n} (G \circ F)_* = G_* \circ F_*$$

bulunur.

Soru: $\alpha: \mathbb{R} \to E^3$

$\alpha(t) = (12\cos t, -12\sin t, 5t)$ eğrisinin

a) birim hızlı parametrik gösterimini bulunuz.

b) $\alpha(0)$ ve $\alpha(2)$ noktaları arasındaki uzunluğu bulunuz.

Çözüm: a) $\alpha(t) = (12\cos t, -12\sin t, 5t)$

$$\alpha'(t) = (-12\sin t, -12\cos t, 5)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{144\sin^2 t + 144\cos^2 t + 25} = 13 \neq 1$$

olduğundan α eğrisi birim hızlı değildir. Eğrinin $t=0$ noktasından başlayan yay uzunluk fonksiyonu

$$s = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t 13 du = 13u \Big|_0^t = 13t$$

$$\Rightarrow s = 13t$$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{13} \quad \Rightarrow \quad \beta(s) = \alpha(t(s))$$
$$= \alpha\left(\frac{s}{13}\right) = \left(12\cos\left(\frac{s}{13}\right), -12\sin\left(\frac{s}{13}\right), \frac{5s}{13}\right)$$

b) $l = \int_0^2 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^2 13 dt = 13t \Big|_0^2$

$$= 26$$

SORU : $\alpha : \mathbb{R} \to E^3$

$t \to \alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a>0$, $b\neq 0$ helis eğrisinin

$\alpha(0)$ noktasındaki teğet denklemini yazınız.

Çözüm: $\alpha(0) = (a,0,0)$ noktasındaki teğet doğrusunu bulalım.

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\alpha'(0) = (0, a, b)$$

Eğrinin $\alpha'(0) = (0,a,b)$ vektörü eğrinin $\alpha(0)$ noktasındaki hız vektörüdür ve bu noktadaki teğet doğrusu için doğrultman vektörü olarak alınabilir.

O halde eğrinin $\alpha(0)$ noktasındaki teğet doğrusu $\beta(t)$ ile

$$\beta(t) = \alpha(0) + t\,\alpha'(0)$$

$$= (a,0,0) + t(0,a,b) = (a, at, bt)$$

olarak bulunur.

SORU: $\alpha : \mathbb{R} \to E^3$

$$t \to \alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$$

ile tanımlanan eğrinin T, N, B Frenet vektörlerini bulunuz.

Çözüm: $\alpha'(t) = (2, 2t, t^2)$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4+4t^2+t^4} \neq 1$$ old eğri birim hızlı eğri değildir.

Buna göre

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{4+4t^2+t^4}}(2, 2t, t^2) = \frac{1}{t^2+2}(2, 2t, t^2)$$

bulunur.

$$\alpha''(t) = (0, 2, 2t)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2t & t^2 \\ 0 & 2 & 2t \end{vmatrix} = (2t^2, -4t, 4)$$

ve $\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \sqrt{4t^4+16t^2+16} = 2t^2+4$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} = \frac{1}{2t^2+4}(2t^2, -4t, 4) = \frac{1}{t^2+2}(t^2, -2t, 2)$$

bulunur.

Son olarak

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{t^2}{t^2+2} & \frac{-2t}{t^2+2} & \frac{2}{t^2+2} \\ \frac{2}{t^2+2} & \frac{2t}{t^2+2} & \frac{t^2}{t^2+2} \end{vmatrix}$$

$$N(t) = \frac{1}{(t^2+2)^2} \left(-2t^3-4t,\ -t^4+4,\ 2t^3+4t\right)$$

elde edilir.

SORU: $I: t>0$ ol. üzere $\alpha(t)=(2t, t^2, \ln t)$ eğrisinin $P=(2,1,0)$ ve $Q=(4,4,\ln 2)$ noktaları arasındaki yayının uzunluğunu bulunuz.

$\alpha(t_0)=P \Rightarrow \alpha(t_0)=(2t_0, t_0^2, \ln t_0)=(2,1,0)$

$\Rightarrow 2t_0=2 \quad t_0=1$

$\alpha(t_1)=Q \Rightarrow \alpha(t_1)=(2t_1, t_1^2, \ln t_1)=(4,4,\ln 2)$

$\Rightarrow 2t_1=4 \quad t_1=2$

O halde α nın P ve Q noktaları arasındaki yayının uzunluğu

$$l=\int_1^2 \|\alpha'(t)\|dt = \int_1^2 \|(2, 2t, \tfrac{1}{t})\| dt = \int_1^2 \sqrt{4+4t^2+\tfrac{1}{t^2}}\, dt$$

$$=\int_1^2 \sqrt{\frac{4t^4+4t^2+1}{t^2}}\, dt = \int_1^2 \frac{2t^2+1}{t}\, dt = \int_1^2 \left(2t+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= t^2+\ln t\Big|_1^2 = 4+\ln 2-1-\ln 1$$

$$=3+\ln 2$$

Soru: $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ve $a>0$ ol. üzere

$\beta(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$ eğrisinin Frenet elemanlarını bulunuz.

Çözüm: $\beta'(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$

$$\|\beta'(s)\|=\sqrt{\underbrace{\frac{a^2}{c^2}\sin^2\frac{s}{c}+\frac{a^2}{c^2}\cos^2\frac{s}{c}}_{\frac{a^2}{c^2}}+\frac{b^2}{c^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}}=1$$

old β eğrisi birim hızlı eğridir.

O halde eğrinin birim teğet vektör alanı

$$T(s)=\beta'(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$$

dir.

$$\beta''(s)=\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$\|\beta''(s)\|=\sqrt{\frac{a^2}{c^4}\cos^2\frac{s}{c}+\frac{a^2}{c^4}\sin^2\frac{s}{c}}=\frac{a}{c^2}$$

$$N(s)=\frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|}=\left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\cos\frac{s}{c} & -\sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c} \,,\, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c} \,,\, \frac{a}{c} \right)$$

$$K = \|\beta''(s)\| = \frac{a}{c^2}$$

$$\beta'''(s) = \left(\frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c} \,,\, \frac{-a}{c^3}\cos\frac{s}{c} \,,\, 0 \right)$$

$$\tau = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta''\|^2}$$

$$\det(\beta', \beta'', \beta''') = \begin{vmatrix} -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ \frac{-a}{c^2}\cos\frac{s}{c} & -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c} & 0 \\ \frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c} & -\frac{a}{c^3}\cos\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^2 b}{c^6}$$

$$\tau = \frac{\frac{a^2 b}{c^6}}{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{b}{c^2}$$

Soru : $\alpha(t) = (t\cos t,\ t\sin t,\ t)$ eğrisinin $t=0$ noktasındaki

a) Frenet elemanlarını

b) Oskülatör düzleminin denklemini

c) Rektifiyan düzleminin denklemini

d) Normal düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm : a) $\alpha'(t) = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 1)$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{2+t^2}$$

$$\alpha''(t) = (-2\sin t - t\cos t,\ 2\cos t - t\sin t,\ 0)$$

$$\alpha'''(t) = (-3\cos t + t\sin t,\ -3\sin t - t\cos t,\ 0)$$

$\alpha'(0) = (1,0,1)$ $\qquad \|\alpha'(0)\| = \sqrt{2}$

$\alpha''(0) = (0,2,0)$

$\alpha'''(0) = (-3,0,0)$

$$T(0) = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$B(0) = \frac{\alpha'(0) \times \alpha''(0)}{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = (0, -1, 0)$$

$$\kappa(0) = \frac{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = 1$$

$$\tau(0) = \frac{\langle \alpha'(0) \times \alpha''(0), \alpha'''(0) \rangle}{\|\alpha'(0) \times \alpha'(0)\|^2} = \frac{\langle (-2, 0, 2), (-3, 0, 0) \rangle}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{3}{4}$$

b) Eğrinin $t=0$ noktasındaki oskülatör düzleminde temsili bir nokta $X=(x,y,z)$ ol. üzere

$$\langle \overrightarrow{\alpha(0)X}, B(0) \rangle = 0 \qquad t=0 \text{ için } \alpha(0)=(0,0,0)$$

$$\left\langle (x,y,z), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = 0 \Rightarrow -x+z=0$$

c) Eğrinin $t=0$ noktasındaki rektifiyan düzleminde temsili bir nokta $X=(x,y,z)$ ol. üzere

$$\langle \overrightarrow{\alpha(0)X}, N(0) \rangle = 0$$

$$\langle (x,y,z), (0,-1,0) \rangle = 0 \Rightarrow y=0$$

d) Eğrinin $t=0$ noktasındaki normal düzleminde temsili bir nokta $X=(x,y,z)$ ol. üzere

$$\langle \overrightarrow{\alpha(0)X}, T(0) \rangle = 0$$

$$\left\langle (x,y,z), \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = 0 \Rightarrow x+z=0$$

Soru : Bir $\alpha: I \to E^3$ eğrisi için

$$\alpha(0) = (1,0,-5)$$

$$\alpha'(t) = (t^2, t, e^t)$$

olmak üzere α eğrisinin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{3}+c_1, \frac{t^2}{2}+c_2, e^t+c_3\right)$$

$$\alpha(0) = (c_1, c_2, 1+c_3) = (1,0,-5)$$

$$\Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -6$$

olup

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{3}+1, \frac{t^2}{2}, e^t-6\right)$$

olarak bulunur.

SORU : $\alpha(t)=(2\sin 3t, -2\cos 3t, 6t)$ eğrisi birim hızlı mıdır? Değilse birim hale getiriniz. $0\leq t\leq 5$ için yay uzunluğunu hesaplayınız.

$$\alpha'(t)=(6\cos 3t\ ,\ 6\sin 3t,\ 6)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{36\cos^2 3t + 36\sin^2 3t + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \neq 1$$ old. eğri birim hızlı değildir.

Birim hızlı hale getirmek için parametre değişimi uygulayalım.

$$s=\int_0^t \|\alpha'(u)\|\,du \Rightarrow s=\int_0^t 6\sqrt{2}\,du \Rightarrow s=6\sqrt{2}t$$

$$t=\frac{s}{6\sqrt{2}}$$

$$\beta(s)=\alpha\left(\frac{s}{6\sqrt{2}}\right)=\left(2\sin\frac{3s}{6\sqrt{2}}\ ,\ -2\cos\frac{3s}{6\sqrt{2}}\ ,\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$ bulunur.

$$s=\int_0^5 \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_0^5 6\sqrt{2}\,dt = 6\sqrt{2}t\Big|_0^5 = 30\sqrt{2}$$

Soru : $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 0)$ denklemi ile verilen eğrinin her noktasındaki teğeti ile α nın sabit bir açı yaptığını gösteriniz.

Çözüm: $\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle =$ sabit olduğunu göstermeliyiz.

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 0)$$

$$\alpha'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 0)$$

olduğundan $\alpha(t)$ ile $\alpha'(t)$ arasındaki açıya θ dersek

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha(t)\| \, \|\alpha'(t)\|}$$

$$\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = e^{2t}(\cos^2 t - \cos t \sin t + \sin t \cos t + \sin^2 t)$$
$$= e^{2t}$$

$$\|\alpha(t)\| = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t + 0} = e^t$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}\, e^t$$

$$\cos\theta = \frac{e^{2t}}{e^t \sqrt{2} e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \text{sbt}$$

dir.

SORU: Bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$ uzay eğrisinin bir eğilim çizgisi (helis) olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\frac{d\vec{B}}{ds}, \frac{d^2\vec{B}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{B}}{ds^3}\right) = 0$$

olmasıdır. Burada B, eğrinin binormali ve s yay parametresidir.

Çözüm: $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin s yay parametresi ol. üzere α eğrisi üzerindeki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ise

$$\Rightarrow B' = -\tau N$$

$$\Rightarrow B'' = -\tau' N - \tau N'$$

$$= -\tau' N - \tau(-\kappa T + \tau B)$$

$$= -\tau' N + \kappa\tau T - \tau^2 B$$

$$\Rightarrow B''' = -\tau'' N - \tau' \underbrace{N'}_{-\kappa T + \tau B} + \kappa'\tau T + \kappa\tau' T + \kappa\tau \underbrace{T'}_{\kappa N} - (\tau^2)' B - \tau^2 \underbrace{B'}_{-\tau N}$$

$$= (2\tau'\kappa + \kappa'\tau)T + (\tau'' + \tau\kappa^2 + \tau^3)N + (-3\tau\kappa')B$$

elde edilir.

$$\det\left(\frac{d\vec{B}}{ds}, \frac{d\vec{B}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{B}}{ds^3}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ \kappa\tau & -\tau' & -\tau^2 \\ 2\tau'\kappa+\kappa'\tau & \tau''+\tau\kappa^2+\tau^3 & -3\tau\kappa' \end{vmatrix}$$

$$= \tau^3(-\tau'\kappa + \tau\kappa')$$

$$= -\tau^5\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

($\Rightarrow$): Eğer α helis ise $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olacağından $\det\left(\frac{d\vec{B}}{ds}, \frac{d^2\vec{B}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{B}}{ds^3}\right) = 0$ olur.

($\Leftarrow$): $\det\left(\frac{d\vec{B}}{ds}, \frac{d\vec{B}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{B}}{ds^3}\right) = 0$ ise $\tau \neq 0$ old.

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$$

ve buradan $\frac{\tau}{\kappa} = sbt$ elde edilir.

Soru: $\alpha : I \to E^3$

$$t \to \alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3)$$

eğrisi helis midir? Gösteriniz.

Çözüm: $\alpha'(t) = (6, 6t, 3t^2)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{36 + 36t^2 + 9t^4} \neq 1$ old. α eğrisi birim hızlı değildir.

O halde

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \quad \text{dir.}$$

$\alpha''(t) = (0, 6, 6t)$

$\alpha'''(t) = (0, 0, 6)$

$$\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \begin{vmatrix} 6 & 6t & 3t^2 \\ 0 & 6 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 216$$

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} i & J & k \\ 6 & 6t & 3t^2 \\ 0 & 6 & 6t \end{vmatrix} = (18t^2, -36t, 36)$$

$\|\alpha' \times \alpha''\| = \sqrt{18^2(t^4 + 4t^2 + 4)} = 18(t^2 + 2)$

$\|\alpha'(t)\| = 3t^2 + 6$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{18(t^2+2)}{(3(t^2+2))^3}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{216}{18^2(t^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \frac{216}{18^2(t^2+2)^2} \cdot \frac{27(t^2+2)^3}{18(t^2+2)} = 1 = \text{sbt}$$

olup α eğrisi helistir.

Soru: $\alpha(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\sin\frac{s}{5}, \frac{4s}{5}\right)$ dairesel helisinin involüt eğrilerinin düzlemsel olduğunu gösteriniz.

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda T(s) \qquad \lambda = (c-s)$$

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$\beta(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\sin\frac{s}{5}, \frac{4s}{5}\right) + (c-s)\left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\tau^* = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \times \beta''\|^2}$$

$$\beta''(s) = -\frac{3}{5^3}(c-s)\left(-\sin\frac{s}{5}, \cos\frac{s}{5}, 0\right) + \frac{3}{5^2}\left(\cos\frac{s}{5}, \sin\frac{s}{5}, 0\right)$$

$$\beta'''(s) = \frac{3}{5^4}(c-s)\left(-\cos\frac{s}{5}, -\sin\frac{s}{5}, 0\right) + 2\cdot\frac{3}{5^2}\left(-\sin\frac{s}{5}, \cos\frac{s}{5}, 0\right)$$

$$\det(\beta', \beta'', \beta''') = 0$$

$\tau^* = 0$ bulunur.

Soru: Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktalarındaki birim teğet vektörler arasındaki açının sabit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: α ve β Bertrand eğri çiftleri olmak üzere karşılıklı noktalarındaki teğet vektörleri T ve T^* ile gösterilsin. Bu vektörler arasındaki açı θ ise, o zaman

$$\langle T, T^* \rangle = \|T\| . \|T^*\| . \cos\theta \text{ yazılır.}$$

Buradan

$$\frac{d}{ds}\langle T, T^* \rangle = \left\langle \frac{dT}{ds}, T^* \right\rangle + \left\langle T, \frac{dT^*}{ds} \right\rangle$$

$$= \langle \kappa N, T^* \rangle + \left\langle T, \kappa^* N^* \frac{ds^*}{ds} \right\rangle$$

$$= \kappa \langle N, T^* \rangle + \kappa^* \frac{ds^*}{ds} \langle T, N^* \rangle$$

bulunur. α ve β Bertrand eğri çifti olduğundan $\{N, N^*\}$ lineer bağımlı olup

$$\langle N, T^* \rangle = 0 \text{ ve } \langle T, N^* \rangle = 0 \text{ elde edilir.}$$

Bunun anlamı $\frac{d}{ds}\langle T, T^* \rangle = 0$ dır. O halde $\cos\theta = \text{sabit}$ olup

$\theta = \text{sabit}$ elde edilir.