Soru 1: Bir endomorfizmanın 1-1 olması için gerek ve yeter koşul 0 ın bir özdeğer olmamasıdır, gösteriniz.

Hatırlatma (Teorem 7.4): V ve W iki vektör uzayı ve $A: V \to W$ lineer dönüşüm olsun.

a) $\text{Çek} A$, V nin bir alt uzayıdır.

b) A nın 1-1 olması için gerek ve yeter şart $\text{Çek} A = \{0_V\}$ olmasıdır.

Çözüm: ($\Rightarrow$:) Kabul edelim ki bir $A: V \to V$ endomorfizması 1-1 olsun. O zaman, teorem 7.4 b den $\text{Çek} A = \{0_V\}$ dir. O halde, $A(\vec{\alpha}) = 0\vec{\alpha} = 0_V \Rightarrow \vec{\alpha} \in \text{Çek} A = \{0_V\} \Rightarrow \vec{\alpha} = 0_V$ olur. O halde, 0, A nın bir özdeğeri değildir.

($\Leftarrow$:) 0, $A: V \to V$ endomorfizmasının bir özdeğeri olmasın. O halde, $A(\vec{\alpha}) = 0\vec{\alpha}$ için $\vec{\alpha} = 0$ dır. Burada, $\vec{\alpha} \in \text{Çek} A$ için $A(\vec{\alpha}) = 0_V = 0\vec{\alpha}$ dır. Şu halde kabulden $\vec{\alpha} = 0$ dır. Buradan, özdeğer tanımından $\text{Çek} A = \{\vec{0_V}\}$ elde edilir. Böylece, teorem 7.4 b den A lineer dönüşümü 1-1 dir.

Soru 2: Hiçbir özdeğere sahip olmayan bir $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfizması bulunuz.

Çözüm: $\mathbb{R}^2$ nin $\phi = \{(1,0), (0,1)\}$ doğal tabanına göre matrisi

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olan, $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfizmasını alalım. Şu halde,

$A(1,0) = (0,1)$, $A(0,1) = (-1,0)$ ve ya

$$A(x,y) = A(x(1,0) + y(0,1)) \underset{\substack{A \text{ lineer} \\ \text{dönüşüm}}}{=} xA(1,0) + y(0,1)$$

$$= x(0,1) + y(-1,0)$$

$$= (0,x) + (-y,0)$$

$= (-y,x)$ ile tanımlıdır.

$A(x,y) = (-y, x) = \lambda(x,y) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda x + y = 0 \\ -x + \lambda y = 0 \end{array}\right\}$$ Lineer denklem sistemi elde edilir.

Son homojen denklem sisteminin sıfır çözümden farklı çözümlerinin bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul katsayılar matrisinin determinantının 0 olmasıdır. Şu halde, A lineer dönüşümünün karakteristik denklemi:

$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (-1) = \lambda^2 + 1 = 0$ dır.

$\lambda^2 + 1 = 0$ için hiçbir reel kök olmadığından, öz değerleri de yoktur.

Soru 3 : Türevi mevcut reel fonksiyonlar uzayında, türev alma işlemine göre $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots, e^{m_k x}$ fonksiyonlarının birer öz vektör olduklarını gösteriniz.

Çözüm : Her $i = 1, 2, \ldots, k$ için $\frac{d}{dx} e^{m_i x} = m_i e^{m_i x}$ eşitliği sağlandığından yani türevi mevcut reel fonksiyonlar üzerinde türev alma işlemi ile tanımlı bir A lineer dönüşümü için $A(e^{m_i x}) = m_i e^{m_i x}$ ve $e^{m_i x} \neq 0$ olduğundan; öz değer - öz vektör tanımına göre m_i'lerin birer öz değer ve $e^{m_i x}$ lerin de bunlara karşılık gelen birer öz vektör oldukları görülür.