

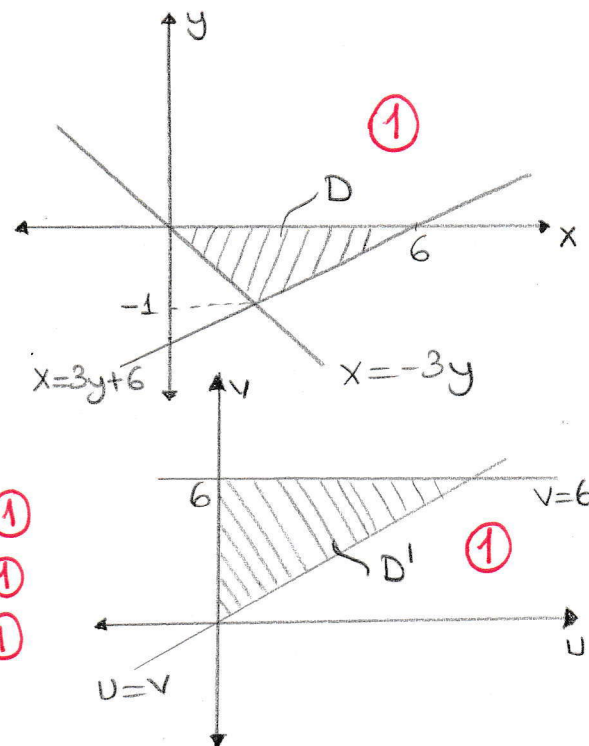
Sorut: $\int_{-1}^0 \int_{-3y}^{3y+6} \frac{x+3y}{(x-3y)^2} \sin(x-3y) dx dy = ?$

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \quad x=3y+6 \\ y=-1 \quad x=-3y \end{array} \right\} D \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = x+3y \\ v = x-3y \end{array} \right\} (1)$$

$$\begin{array}{lcl} D & & D' \\ x-3y=6 & \rightarrow & v=6 \quad (1) \\ x+3y=0 & \rightarrow & u=0 \quad (1) \\ y=0 & \rightarrow & u=v \quad (1) \end{array}$$



$$J(u,v) = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$dx dy = \frac{1}{6} du dv \quad (1)$$

$$I = \iint_{D'} \frac{1}{6} \frac{u}{v^2} \cdot \sin v du dv = \frac{1}{6} \int_{v=0}^6 \int_0^v u \cdot \frac{\sin v}{v^2} du dv \quad (1) \quad (1) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^6 \left(\frac{u^2}{2} \cdot \frac{\sin v}{v^2} \right) \Big|_0^v dv$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^6 \sin v dv \quad (2)$$

$$= \frac{1}{12} (-\cos v) \Big|_0^6$$

$$= \frac{1}{12} (1 - \cos 6) \quad (2)$$

Soru2: $F(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy(x^2-2y^2)}{x^2+4y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonksiyonu için $F_{xy}(0,0)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm: $(x,y) \neq (0,0)$ için,

1.yol $F_x(x,y) = \frac{(9x^2y - 6y^3)(x^2+4y^2) - 2x(3x^3y - 6xy^3)}{(x^2+4y^2)^2} \quad (1)$

$$F_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+h,0) - F(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0 \quad (1)$$

$$F_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_x(0,0+h) - F_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-24h^5}{16h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-24h^5}{16h^5} = -\frac{3}{2} \quad (2)$$

2.yol $F_x(0,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+h,y) - F(0,y)}{h} \quad (1) \quad F(0,y) = 0 \quad (1)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3yh(h^2-2y^2)}{h^2+4y^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3y(h^2-2y^2)}{h^2+4y^2}$$

$$= -\frac{6y^3}{4y^2} = -\frac{3}{2}y \quad (2)$$

$$F_{xy}(0,y) = -\frac{3}{2} \Rightarrow F_{xy}(0,0) = -\frac{3}{2} \quad (2)$$

Soru3: $f(x,y) = 4x^2 + y^4 - 7y^2 - 4xy + 4y - 8x + 4$ fonksiyonunun tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm:

$$f_x = 8x - 4y - 8 = 0 \quad (1) \Rightarrow 2x - y - 2 = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 14y - 4x + 4 = 0 \quad (1) \Rightarrow 2y^3 - 7y - 2x + 2 = 0$$

$$f_{xx} = 8 = A \quad (1)$$

$$f_{xy} = -4 = B \quad (1)$$

$$f_{yy} = 12y^2 - 14 = C \quad (1)$$

$$2y^3 - 8y + \underbrace{y - 2x + 2}_0 = 0$$

$$y(y^2 - 4) = 0 \quad (1)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 1 \quad P(1,0) \quad (1)$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 2 \quad Q(2,2) \quad (1)$$

$$y = -2 \Rightarrow x = 0 \quad R(0,-2) \quad (1)$$

	$A = 8$	$B = -4$	$C = 12y^2 - 14$	$B^2 - AC$
$P(1,0)$	8	-4	-14	$\Delta = 16 + 8 \cdot 14 = 128 > 0 \quad (1)$
$Q(2,2)$	8	-4	34	$\Delta = 16 - 8 \cdot 34 = -256 < 0, A = 8 > 0 \quad (1)$
$R(0,-2)$	8	-4	34	$\Delta = 16 - 8 \cdot 34 = -256 < 0, A = 8 > 0 \quad (1)$

$P(1,0) \rightarrow$ Eyer noktası (1)

$Q(2,2) \rightarrow$ Yerel minimum noktası (1)

$R(0,-2) \rightarrow$ Yerel minimum noktası (1)

Soru 4! Üç arkadaş P noktasında türevlenebilen bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu ile ilgili bir problem üzerinde çalışıyorlar. Bu üç kişi yaptıkları hesaplamaları tartışırken :

I. Kişi : " $f(x,y,z)=c$ yüzeyinin P noktasındaki teget düzlemini $x+2y+2z=4$ buldum." diyor.

II. Kişi : " f nin P noktasındaki yönlü türevinin alabileceği maksimum değerini 4 buldum." diyor.

III. Kişi : " f nin P noktasındaki $\vec{v}=3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ vektörü yönündeki türevini 19 buldum." diyor.

Bu kişilerin konuşmalarını duyan ve f fonksiyonunu bilmeyen dördüncü bir kişi : "Üç arkadaşta en az birinin hesaplamasının yanlış olduğunu" düşünüyor. Dördüncü kişinin bu düşüncesinin sebebini (yapacağınız işlemler ile) açıklayınız / ispatlayınız.

Çözüm! Farzedelim ki, üç kişinin de hesaplamaları doğru olsun.

1. kişiden ; $x+2y+2z=4 \Rightarrow \vec{n}=\langle 1, 2, 2 \rangle$ * ①
 $\vec{n} \parallel \nabla f|_P \Rightarrow \nabla f|_P = \langle k, 2k, 2k \rangle$ ③ olmalıdır.

2. kişiden ; $|\nabla f|_P = 4$ * ① olmalıdır.

3. kişiden ; $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \langle \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7} \rangle$ $\nabla f|_P \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = 19$ * ① olmalıdır.

1. ve 2. den : $k^2 + 4k^2 + 4k^2 = 4^2$ ② $\Rightarrow 9k^2 = 16 \Rightarrow k = \pm \frac{4}{3}$ ②

1. ve 3. den : $\nabla f|_P \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \langle k, 2k, 2k \rangle \cdot \langle \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7} \rangle = \frac{3k+12k+4k}{7} = 19 \Rightarrow k=7$ ② ① $\neq$

k değerleri birbirinden farklı çıktı. Çelişki !

Hepsi birden doğru olamaz. En az birinin hesaplaması yanlıştır. ②

Dikkat! * eşitliklerini doğru yazana fakat $\nabla f|_P = \vec{n} = \langle 1, 2, 2 \rangle$

olarak işlem yapana toplam (1+1+1) 3 puan verilecektir.

Soru 5:

a) $g(u,v)$ fonksiyonu $g(4,7)=2020$, $g_u(4,7)=5$, $g_v(4,7)=2$ eşitliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun.

$f(x,y,z) = g(y^2+4xz, 4y-x^2+z)$ olmak üzere $f(x,y,z)=2020$ yüzeyinin $(1,2,0)$ noktasındaki D teğet düzlemini bulunuz.

b) $\vec{r}(t) = \langle 3t^2+9t, -t+3, t^2+2t \rangle$, $-\infty < t < \infty$ eğrisinin

(a) şıkında bulduğunuz D düzlemine paralel olan teğet doğrusunu bulunuz.

Çözüm: a) $\left. \begin{array}{l} y^2+4xz=u \\ 4y-x^2+z=v \end{array} \right\} g(4,7)=2020=f(1,2,0)$

$$f(x,y,z) = g(u,v)$$

$$f_x = g_u \cdot u_x + g_v \cdot v_x = g_u \cdot 4z + g_v \cdot (-2x) \Rightarrow f_x(1,2,0) = 5 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = -4$$

$$f_y = g_u \cdot u_y + g_v \cdot v_y = g_u \cdot 2y + g_v \cdot 4 \Rightarrow f_y(1,2,0) = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 28$$

$$f_z = g_u \cdot u_z + g_v \cdot v_z = g_u \cdot 4x + g_v \cdot 1 \Rightarrow f_z(1,2,0) = 5 \cdot 4 \cdot 1 + 2 = 22$$

$$\vec{n} = \nabla f(1,2,0) = \langle -4, 28, 22 \rangle$$

$$D: f_x(1,2,0)(x-1) + f_y(1,2,0)(y-2) + f_z(1,2,0)(z-0) = 0$$

$$-4(x-1) + 28(y-2) + 22z = 0 //$$

b) $\vec{r}(t) = \langle 3t^2+9t, -t+3, t^2+2t \rangle$

$\vec{n} \perp \vec{r}'(t)$ olmalı $\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r}'(t) = 0$

$\vec{r}'(t) = \langle 6t+9, -1, 2t+2 \rangle$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}'(t) = \langle -4, 28, 22 \rangle \cdot \langle 6t+9, -1, 2t+2 \rangle$$

$$= -24t - 36 - 28 + 44t + 44 = 0$$

$$\Rightarrow 20t = 20 \Rightarrow t = 1$$

$$\vec{r}(1) = \langle 12, 2, 3 \rangle$$

$$\vec{r}'(1) = \langle 15, -1, 4 \rangle$$

Teğet doğrusu: $\begin{cases} x = 12 + 15t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

//