MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN MODELLENMESİ VE SİMÜLASYONU

Mustafa Kemal SEVİNDİR, Ph.D

sevindir@yildiz.edu.tr

Karmaşık Dünyanın Modellere İhtiyacı Var

Mühendisler ve Bilim İnsanları “Sistemleri” Anlamaya, Geliştirmeye veya Optimize Etmeye Çalışır.

"Sistem", doğanın bir parçası olabilecek (bir bitki hücresi, bir atom, bir galaksi vb.) ilgilenilen nesneyi veya yapay bir teknolojik sistemi ifade eder.

Örneğin, düz olmayan bir zeminden dolayı kararsız olan bir masa problemini düşünün.

Bu teknik bir sistemdir ve herkes problemi çözmek için ne yapılması gerektiğini bilir: Masanın altına uygun karton parçaları koymak zorundayız.

Her birimiz, yaşamımız boyunca bu türden basit teknolojik sistemlerle ilgili çok sayıda problemi çözüyoruz.

Bunun ötesinde, sadece mühendisler tarafından çözülebilen çok sayıda gerçekten zor teknik problemler vardır.

Bu daha zorlu sorunların karakteristiği, teknik sistemin yüksek bir karmaşıklığıdır. Bilgisayar işlemcileri, motorlar, vb. gibi karmaşık teknik sistemlerle uğraşmak zorunda kalmazsak, mühendislere ihtiyaç duymazdık.

Benzer şekilde, eğer bitkilerin fotosentezi gibi süreçler kararsız bir masa gibi basit olarak anlaşılabilse, bilim insanlarına ihtiyaç duymayız.

Bilim insanları ve mühendislerimizin, neredeyse var olma haklarının olmasının nedeni, doğanın ve teknolojik sistemlerin karmaşıklığıdır.

(Karmaşıklık sorunu) Karmaşık sistemlerle uğraşmak ve işlerinde etkili olmak bilim insanlarının ve mühendislerin asıl görevidir, karmaşıklık ile başa çıkmak için özel yöntemlere gereksinim duyarlar.

Mühendislerin veya bilim insanlarının kendi sistemlerinin karmaşıklığını yok etmek için kullandıkları genel strateji, karmaşık sistemlerle uğraşırken gündelik hayatımızda kullandığımız aynı stratejidir: sadeleştirme.

Fikir şu:

Bir şey karmaşıksa, daha basit hale getirin.

Karmaşık bir sistemle ilgili günlük yaşam sorununu düşünün: Çalışmayan bir araba.

Bu durumda herkes, çoğu zaman akü ve yakıt seviyesine bakmanın sorunu çözeceğini biliyor.

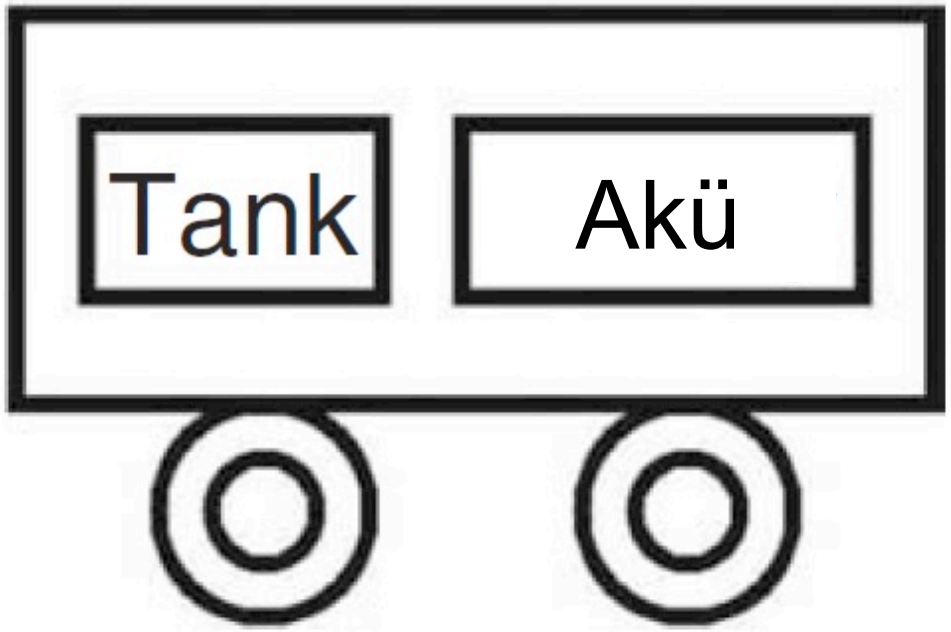
Herkes bunu otomatik olarak yapacak, ancak bunun arkasındaki problem çözme stratejisini anlayabilmek için alternatif bir senaryo düşünelim.

Bu durumla birisinin ilk kez karşılaştığını varsayalım.

"Birisi" araba sürmeyi bildiğini, arabayı ara sıra kullandığını ve şimdi ise otomobilin çalışmadığı bir durumla ilk kez karşılaştığını söyler.

Tabii ki, biz aynı zamanda yakınlarda bir yardımın olmadığını varsayalım!

Daha sonra, “birisi”, ilk kez kaputun altına baktığında, çalıştığı sürece basit görünen otomobilin oldukça karmaşık bir sistem olduğunu anlayacaktır.



Şekil 1. Araba gerçek bir sistem ve bir model olarak

Bu basitleştirilmiş resmin verilen bu durum için uygun olduğunu biliyoruz. Bize akü ve yakıt seviyesine bakmamızı söylüyor ve daha sonra sorunu kısa sürede çözmemiz için bize yol gösteriyor.

Bu, mühendisler veya bilim insanları tarafından karmaşık sistemlerle uğraşırken kullanılan stratejidir.

Karmaşık sistemleri anlamak isteyen veya karmaşık sistemlerle ilgili problemleri çözmek isteyen herkes, söz konusu sistemin uygun basitleştirilmiş şeklini uygulamalıdır.

Bu, karmaşık sistemlerle ilgilenen herkesin modellere ihtiyacı olduğu anlamına gelir, çünkü bir sistemin basitleştirilmiş şekilleri, bu sistemin tanımına göre modelleridir.

(Modellerin Rolü) Bir sistemin karmaşıklığını ortadan kaldırmak için, mühendisler ve bilim insanları bu sistemin basitleştirilmiş şeklini kullanırlar (yani. modeller).

Sistemler, Modeller, Simülasyonlar

1965'te Minsky, modelin aşağıdaki genel tanımını verdi.

(Model) Bir gözlemciye (B) göre, bir (A^*) nesnesi bir A nesnesinin modelidir, B (gözlemci) A'yı ilgilendiren soruları cevaplamak için (A^*)'yı kullanabilir.

Sistemler, Modeller, Simülasyonlar

Modelleme ve Simülasyonun Teleolojik* Doğası

***Teleolojik: (Teleoloji hedef ve amaçlarla ilgilenen felsefi bir disiplindir ve teleolojinin kendisi, Yunanca sözcük ‘telos’dan gelir, bu da son ya da amaç anlamına gelir.)**

Yukarıdaki model tanımının önemli bir yönü, bir modelin amacının, sorulara cevap vermemize ve problemleri çözmemize yardımcı olmasıdır.

Bu önemlidir çünkü özellikle modelleme alanında yeni başlayanların, iyi bir modelin, mümkün olduğu kadar yakından ilgilendiği gerçeğin bir parçasını taklit ettiğine inanmaya eğilimli olmalarıdır.

(En iyi model) En iyi model hala amacına hizmet eden, yani bir sistemi anlamamıza ve sorunları çözmemize yetecek kadar karmaşık olan en basit modeldir.

Basit bir model göz önüne alındığında, karmaşık bir sistemin karmaşıklığı artık görüşümüzü engellemeyecektir ve şeylerin merkezinde sistemin karmaşıklığı neredeyse görebileceğiz.

Modelleme ve simülasyonun tüm prosedürü problem çözme amacına göre yapılır - aksi takdirde sadece sanat eseri olur.

Modelleme ve simülasyon daima hedefe yöneliktir, yani, modelimizin amacını, onu oluşturmak için oturmadan önce bilmeliyiz. Dolayısıyla, model terimi gibi temel kavramları, modelleme ve simülasyonun amaç odaklı veya teleolojik doğasına özel bir vurgu ile tanımlamak doğaldır.

Sistemler, Modeller, Simülasyonlar

Modelleme ve Simülasyon Şeması

Kavramsal olarak, modellerin kullanıldığı karmaşık sistemlerin araştırılması, aşağıdaki adımlara ayrılabilir:

(Modelleme ve simülasyon şeması)

Tanım:

- Çözülmesi gereken bir sorunun ya da cevaplanması gereken bir sorunun tanımı.
- Bir sistemin tanımı, yani, bu problem veya soruyla ilgili olan gerçekliğin bir parçasıdır.

Sistem analizi:

- Sistemin sorun ya da soruyla ilgili kısımlarının belirlenmesi.

Modelleme:

- Sistem analizi aşamasının sonuçlarına dayanan bir sistem modelinin geliştirilmesi.

Simülasyon (benzetim)

- Modelin problem veya soruya uygulanması.
- Sorunu çözmek için bir stratejinin türetilmesi veya soruya cevap verilmesi.

Validasyon (doğrulama)

- Simülasyon aşamasında elde edilen strateji sorunu çözüyor mu veya gerçek sistem için soruyu cevaplıyor mu?

Araba örneğinde

Tanım:

Sorun şu ki araba çalışmıyor ve arabanın kendisi sistem.

Sistem Analizi:

Akü ve yakıt seviyesi sistemin ilgili kısımlarıdır.

Modelleme:

Şekil 1'de olduğu gibi bir akü ve bir tanktan oluşan bir model geliştirilmiştir.

Şekil 1. Araba gerçek bir sistem ve bir model olarak

Simülasyon :

Bu modelin, şemanın “simülasyon” adımında verilen soruna uygulanması bizi “akü ve yakıt seviyesini kontrol et” stratejisine götürür.

Validasyon :

Bu strateji, daha sonra "validasyon" adımında gerçek araca uygulanabilir.

Çalışırsa, yani eğer araç aküyü veya deposunu yeniden doldurduktan sonra gerçekten çalışırsa, modelin geçerli veya doğrulandığını söyleriz.

Gerçek bir modelleme ve simülasyon projesinde, modelleme ve simülasyon şemasının sistem analizi adımı çok zaman alıcı bir adım olabilir.
Genellikle literatürün kapsamlı bir değerlendirmesi gerekecektir.
Birçok durumda, literatür değerlendirmesi, geçmişte benzer araştırmaların yapıldığını gösterecektir Elbette ki, literatürde anlatılan başkaları tarafından yapılan deneyimlerden faydalanmaya çalışılmalıdır.

Bunun ötesinde, sistem analizi adımı genellikle sistemle ilgili sorularınızı cevaplayabilen farklı disiplinlerden insanları bir araya getiren birçok tartışmayı ve toplantıyı içerir. Bu tartışma, genellikle, sistemin daha iyi anlaşılması ve modellerin modelleme ve simülasyon şemasının validasyon aşamasında onaylanması için yeni verilere ihtiyaç duyulduğunu gösterecektir.

Bu nedenle, bir deney programının tanımı, sistem analizi adımının tipik bir başka parçasıdır.

Modelleme adımı, matematik modelin denklemlerini çözebilecek uygun yazılımların tanımlanmasını da içerecektir.

Doğrulama adımında, model sonuçları deneysel verilerle karşılaştırılacaktır. Bu veriler literatürden veya modeli doğrulamak için özel olarak tasarlanmış deneylerden gelebilir.

Genellikle, verileri sadece nicel olarak değil, aynı zamanda verilerin genel şeklini mümkün olduğu kadar yeniden üretme anlamında da niteliksel olarak uydurmak için bir model gereklidir.

Ancak, elbette, niceliksel ve niteliksel olarak verilere mükemmel şekilde uyan bir model bile, modelleme ve simülasyon şemasının doğrulama adımını geçemeyebilir.

Basit modellerle başlayın!

En iyi modeli bulmak için, mümkün olan en basit modelle başlayın.

Daha sonra, dizideki son model, doğrulama adımını geçene kadar giderek karmaşıklaşan model formülasyonlarının bir dizisini oluşturun.

Sistemler, Modeller, Simülasyonlar

Simülasyon

Simülasyon:

Simülasyon, bir problemin çözülmesine ya da bir sistemle ilgili bir soruyu cevaplamaya yardımcı olan stratejilerin türetilmesi amacıyla bir modelin uygulanmasıdır.

Simülasyon terimi Latince 'simulare' sözcüğünden gelmektedir, bu da 'taklit etmek' anlamına gelir: bir simülasyonda, model gerçek sistem gibi davranır.

Sistemler, Modeller, Simülasyonlar

Sistem

Sistem

Sistem, özellikleri üzerinde çalışmak istediğimiz bir nesne veya nesneler topluluğudur.

Sistemler, Modeller, Simülasyonlar

Kavramsal ve Fiziksel Modeller

Araba örneğinde kullanılan model sadece aklımızda var olan bir şeydir.

Birkaç cümle ve/veya eskizle bir kağıda yazabiliriz, ancak herhangi bir fiziksel gerçekliğe sahip değildir. Bu tür modellere kavramsal modeller denir.

Kavramsal modeller, her birimiz tarafından çalışmayan araba örneğinde olduğu gibi gündelik problemleri çözmek için kullanılmaktadır.

Ayrıca, mühendisler veya bilim insanları tarafından, araba örneğine benzer basit sorunlara veya sorulara da uygulanırlar.

Sorunları veya soruları yeterince karmaşıksa, deneylere güvenirler ve bu da bizi başka tür modellere yönlendirir.

Örneğin; Bir mühendis bir motorun yakıt tüketimini azaltmak istiyor:

Bu durumda sorun yakıt tüketiminin azaltılması ve sistemin motor olmasıdır. Sistem analizinin, mühendise yakıt enjeksiyon pompasının optimize edilmesi gerektiği sonucuna götürdüğünü varsayalım.

Tipik olarak, mühendis daha sonra yakıt enjeksiyon işleminin ayrıntılarını inceleyebilecek bazı deneysel düzenekler oluşturacaktır.

Böyle bir deneysel düzeneğin, tipik olarak, bu motorun çok basitleştirilmiş bir versiyonu olacağı, yani tipik olarak motorun yakıt enjeksiyon prosesi ile yakından bağlantılı olan sadece birkaç parçasını içereceği şeklinde bir modeldir.

Kavramsal bir modelin tersine, sadece zihnimizde bir fikir değil, aynı zamanda fiziksel dünyanın gerçek bir parçası vardır, bu tür modellerin fiziksel modeller olarak adlandırılmasının nedeni de budur.

Mühendis daha sonra stratejiler türetmek için yakıt enjeksiyon sisteminin fiziksel modelini kullanacaktır. Örneğin, motorun yakıt tüketimini azaltmak için yakıt enjeksiyon pompasının yeni bir konstrüksiyonu.

Daha sonra, şemanın validasyon aşamasında, bu yeni konstrüksiyonun yakıt tüketimini azaltma potansiyeli, motorda, yani gerçek sistemde test edilecektir.

Fiziksel modeller bilim insanları tarafından benzer şekilde uygulanır. Örneğin, bitkilerde fotosentez sürecini anlamak isteyen bir bilim adamı düşünelim.

Bir mühendis gibi, bilim insanı basitleştirilmiş deneysel bir düzenek oluşturacaktır - ki bu da bir bitki hücre kültürüne sahip bir kap olabilir - ki burada CO_2, su, ışık vb. gibi önemli değişkenleri kolayca gözlemleyebilir ve ölçebilir.

Doğal Modelleme Dili Olarak Matematik

Giriş-Çıkış Sistemleri

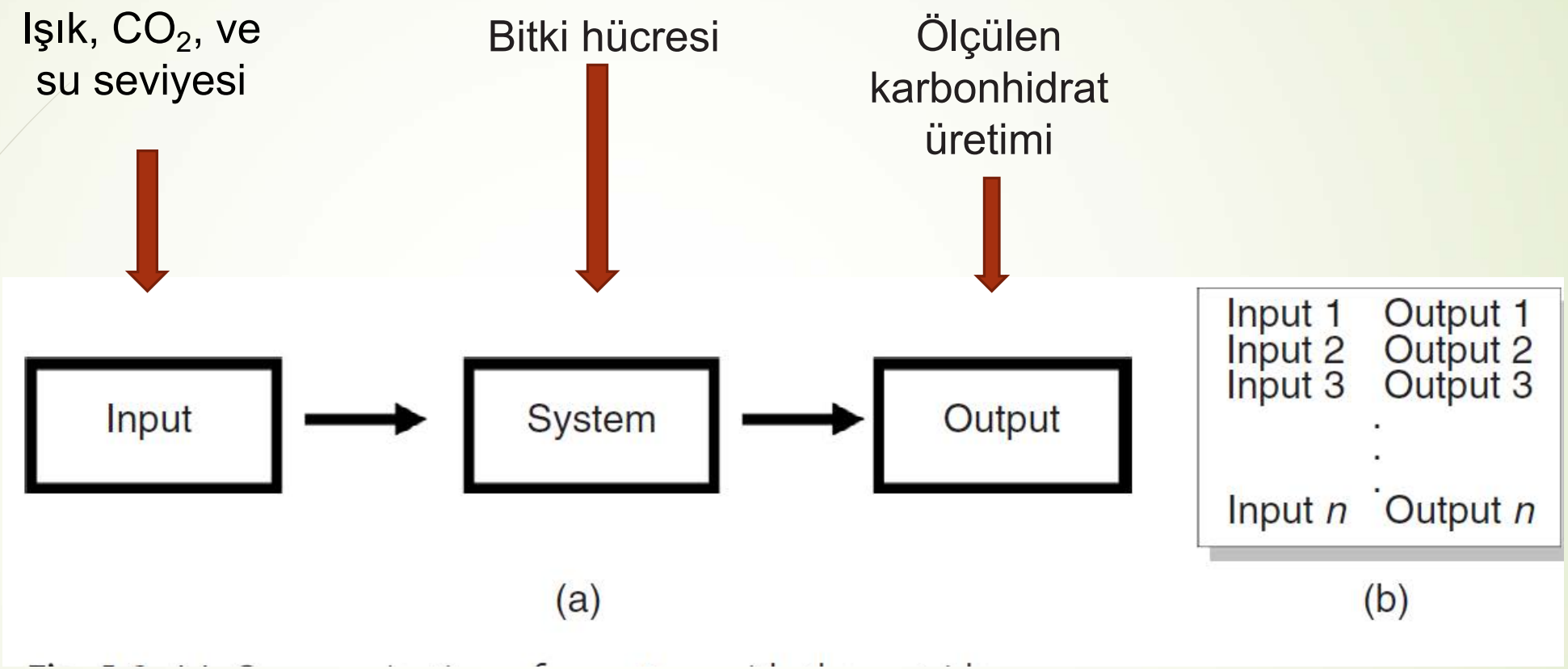
Bilim veya mühendislikte incelenen herhangi bir sistem, ölçülebilen bir çeşit çıktı üretmesi anlamında gözlemlenebilir olmalıdır.

(Bu minimum gerekliliği karşılayamayacak bir sistem bilim insanları veya mühendisler tarafından değil, teologlar tarafından ele alınmak zorunda kalacaktır).

Bu gözlemlenebilirlik durumu, çevrelerinde ölçülebilir yerçekimsel etki üreten, kara delikler gibi doğrudan hiçbir şeyin ölçülemediği sistemler tarafından da karşılanabilir.

Mühendislik veya bilimde incelenen çoğu sistem, aynı zamanda, sistemin çıktısı ile ilgili olarak çalışılabilecek bir tür girdi verilerini de kabul etmektedir (Şekil 2-a).

Örneğin, fotosentezi anlamak isteyen bir bilim insanı muhtemelen bir bitkinin karbonhidrat üretiminin çeşitli seviyelerde ışık, CO_2, su ve benzerinin ölçüldüğü deney düzenekleri oluşturacaktır.



Şekil 2. (a) Bir sistemin dış dünya ile iletişimi
(b) Deneysel veri kümesinin genel şekli

Giriş-çıkış sistemleri

Bilim insanları veya mühendisler, verilen giriş parametrelerini çıkış parametrelerine dönüştüren "giriş-çıkış sistemleri" ni araştırırlar.

Bununla birlikte, tipik olarak, bu türden tanımlayıcı çalışmalar sistemin işleyiş biçimi hakkında sorular ortaya çıkarır ve bu da girdi-çıktı ilişkilerinin devreye girdiği zamandır.

Mühendisler ise, teknoloji ile ilgili olduklarından, her zaman girdi-çıktı ilişkileri ile ilgilidir.

Teknoloji

Bilimsel bilginin insan yaşamının pratik amaçlarına uygulanması.

Bu “pratik hedefler”, genellikle bir sistem çıktısı açısından ifade edilebilir olacaktır ve sistem girdisinin optimize edilmiş sistem çıktısına doğru ayarlanması, mühendislerin tipik olarak ne yaptığı ve gerçekte mühendislik mesleğinin tam olarak ne olduğudur.

Doğal Modelleme Dili Olarak Matematik

Deneysel Verilerin Genel Şekli

Deneysel prosedür, genellikle mühendislikte ve (ampirik) bilimlerde sistemleri anlamak, geliştirmek veya optimize etmek için kullanılır. Siyah kutuları keşfetmek için bir araç olarak düşünmek yararlıdır.

Deneysel bir çalışmanın başlangıcında, incelenen sistem, girdi çıktıya dönüştürüldüğünde, sistem içinde gerçekleşen süreçler hakkında bazı belirsizliklerin olmasından dolayı, “kara kutu” ya benzemektedir.

Bununla birlikte, tipik olarak, deneycinin kendi çalışması sırasında kanıtlamak veya çürütmek istediği iç süreçler hakkında bazı hipotezler olacaktır.

Yani, deneyciler genellikle siyah-beyaz kutular arasında bir yerde bulunan gri kutular gibi sistemler ile ilgilidir.

Deneycinin araştırmak istediği hipoteze bağlı olarak, sistem tarafından üretilen çıktıların hipotezini kanıtlamaya ya da çürütmesine yardımcı olacak umuduyla, sistemi uygun girdi miktarlarıyla karşı karşıya getirir.

Bu bir soru-cevap oyununa benzer: deneyci, sisteme sorular soruyor, ‘bu girdi’, ve sistem bu sorulara ölçülebilir çıktı büyüklükleri açısından cevap veriyor.

Doğal Modelleme Dili Olarak Matematik

Sayısal Verilerin Seçkin Rolü

Şimdi, deneysel veri kümelerinin analizi için uygun yöntem nedir?

Çoğu durumda, deneysel veriler sayılardır ve nicelleştirilebilir.

Bir sistemi matematiksel olarak düşünmek doğaldır.

Bir sistem doğal olarak matematiksel bir fonksiyon olarak görülebilir, ki bu da verilen x girdi büyüklüklerini y=f(x) çıktı büyüklüklerine aktaran haritalardır.

Eğer birisi bir sistemin “kara kutusu” nun iç mekanizmasını anlamak isterse, yani, girdiyi çıktıya dönüştüren gerçek sistem içindeki süreçleri anlamak isterse, doğal olarak yapılması gereken bütün bu süreçlerin matematiksel işlemlere dönüştürülmesi gerekir.

Eğer bu yapılırsa, gerçek sistemin matematiksel terimlerle basitleştirilmiş bir temsiline varılır.

Gerçek bir sistemin basitleştirilmiş bir tarifi (çözmek istediğimiz bir problemle birlikte) tanım olarak bir modeldir.

Gerçek bir sistemin matematiksel terimlerle gösterimi, o sistemin matematik bir modelidir.

(Matematik modellerin doğallığı) Giriş-çıkış sistemleri, genellikle matematiksel terimlerle doğal olarak tanımlanabilen sayısal (veya ölçülebilir) veriler üretir.

İster beğensin beğenmesin, isterse sistemi matematik modelleri kullanarak uygun bir şekilde ele alıp almasın, sistemler ve girdi-çıktı ilişkileri ile ilgilenen herkes, matematiksel problemlerle de ilgilenir.

Bununla birlikte, çalışmasının başarısı, matematik modellerin uygun kullanımına çok bağlı.

Matematik Modellerin Tanımı

Matematik modelleri anlamak için genel bir tanımla başlayalım.

Matematik model matematiksel ifadeler kümesidir M = {1, 2,. . . , n}.

(Matematik Model) Matematik bir model, S'nin bir sistem olduğu, Q'nun S ile ilgili bir soru olduğu ve M'nin Q'ya cevap vermek için kullanılabilen matematiksel ifadeler kümesi M = {1, 2, . . . , n} olduğu bir (S, Q, M) üçlüsüdür.

Q'nun önemini gösteren başka bir örneğe bakalım.

Bir mekanik sistem (S)'nin davranışını tahmin etmek istediğimizi varsayalım.

Uygun matematik model, çözmek istediğimiz soruna, yani soru Q'ya bağlıdır.

Q'nun S'nin davranışını orta hız değerleri için sorması halinde, klasik (Newtonian) mekanik kullanılabilir, yani M = {Newtonian mekaniğin denklemleri}.

Öte yandan, Q, S'nin davranışını ışık hızına yakın hız değerleri için soruyorsa, o zaman M = {göreceli mekaniğin denklemlerini} olur.

Örnekler ve Bazı Diğer Tanımlar

Örnek 1: Bir grup insanın ortalama yaşını bilmek istediğimizi varsayalım.

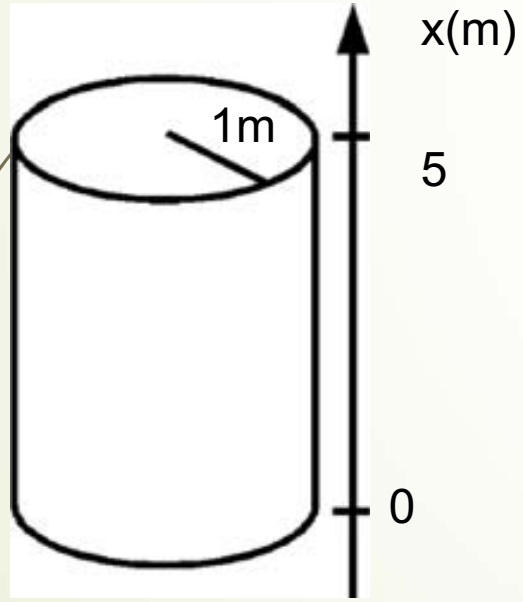
S = İnsan grubu

Q = Ortalama yaş?

M= $\bar{x} = (\sum_{i=1}^{n} x_i)/n$.

ortalama değer formülü olan
bir matematik model (S, Q, M) uygulanabilir.

Örnek 2: Silindirik bir tanktaki sabit bir konsantrasyona (c) sahip maddenin kütlesini (X) bilmek istediğimizi varsayalım.



Tank hacminin maddenin konsantrasyonu (c) ile çarpımı, maddenin kütlesini (X) verir, yani,

$$X = 5\pi c$$

matematik bir model uygularsak (S, Q, M).

S = Tank

Q = Maddenin kütlesi

M; $X = 5\pi c$'dir.

Örnek 3: Basit cebirsel işlemlerden daha fazlasını içeren bir örnek ele alalım.

Şekildeki silindirik tankın içindeki konsantrasyonun (c) yüksekliğe (x) bağlı olduğunu varsayalım.

Bu durumda

$X = 5\pi c$ eşitliği

$X = \pi \cdot \int_0^5 c(x)dx$ şeklini alır.

Hesap içeren birçok matematik modelde (S, Q, M), Q sorusu bazı değerlerin optimizasyonunu ister.
Örneğin, 1 litrelik bir hacme sahip silindirik bir tenekenin malzeme tüketimini en aza indirmek istediğimizi varsayalım.

Bu durumda, problemi çözmek için

$$M = \{\pi r^2 h = 1,\ A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow \min\}$$

eşitliği kullanılabilir.

İkinci ifade, tenekenin yüzey alanının, tenekenin yapımında kullanılan metalin minimize edilmesine eşdeğer minimum yüzey alanı olmasını gerektirir.

Problemin çözümü;

Birinci ifadeden yükseklik (h) terimi yalnız bırakılıp ikinci ifadede yerine konursa

$M = \{\pi r^2 h = 1,\ A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow \min\}$

ifade

$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \rightarrow \min$ şeklini alır.

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0.54\ dm$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1.08\ dm$$

Örnekler ve Bazı Diğer Tanımlar

Durum Değişkenleri ve Sistem Parametreleri

Elbette, her birimiz, silindirik bir tenekenin, yarıçapı r ve yüksekliği h'ye bağlı olarak çok kolay tarif edilebileceğini biliyoruz.

Bu, herkesin doğru matematik modeli otomatik olarak uyguladığı anlamına gelir ve dolayısıyla, herkes otomatik olarak teneke sorunundaki sistemin basit bir şey olduğuna inanır.

Fakat bu modeli tenekeye uygulamazsak, karmaşık bir sistem olur.

Daha önce hiç silindir görmemiş bir Marslı ya da başka bir dünya dışı varlığın olduğunu hayal edin.

Bu Marslıya “Bakın, burada bir miktar metal ve suyla dolu bir örnek teneke var. Bu miktarda su tutabilen ve olabildiğince az metal kullanabilen aynı şekildeki bir teneke yapın” diye söyleyeceğimizi varsayalım.

Sonra bu Marslı - en azından başlangıçta - sorunun orijinal karmaşıklığını görecektir. Eğer akıllıysa, ki, biz de bunu kabul edersek, sonsuz, çok sayıda teneke geometrisinin burada yer aldığını dikkate alacaktır.

Bu orijinal (“Marslı”) bakış açısından bakıldığında teneke örneğinin S sisteminin oldukça karmaşık, aslında sonsuz boyutlu bir sistem olduğunu görürüz.

Ve biz, matematik modelleme prosedürünün sonsuz boyutlarını sadece ikiye indirgeyerek gücünü görüyoruz, çünkü yukarıdaki problemin matematiksel çözümü sadece iki parametreyi içerir: r ve h (veya eşdeğeri, r ve A).

Aslında, yukarıdaki örnekte yer alan “teneke” sistemi, yalnızca kendi koordinat kümeleri ya da yukarıda bahsedilen diğer yönler açısından değil, aynı zamanda matematik modelde model problemin çözümü için önemsiz olduğundan, örneğin metal levhaların kalınlığı veya malzemesi, rengi, sertliği, pürüzlülüğü vb. ihmal edilen birçok başka yönüyle de sonsuz boyutlu bir şeydir.

Orijinal sistem S = “teneke” içinde yer alan tüm bilgiler, matematik model açısından sadece bir $S_r = \{r, h\}$ olarak sistemin bir tanımına indirgendi.

(Ana fayda) Karmaşık sistemlerin bilgi içeriğinin azaltılmış sistemler açısından indirgenmesi, matematik modellerin temel faydalarından biridir.

(Durum değişkenleri) (S, Q, M) matematik bir model olsun. S sisteminin durumunu M cinsinden açıklayan ve Q'ya cevap vermek için gerekli olan s_1, s_2,. . . s_n matematiksel nicelikleri (S, Q, M)'nin durum değişkenleri olarak adlandırılır.

(İndirgenmiş sistem ve sistem parametreleri)

s_1, s_2, … s_n (S, Q, M) matematik modelin durum değişkenleri olsun.

p_1, p_2, … p_m S'nin özelliklerini M cinsinden tanımlayan ve durum değişkenlerini hesaplamak için gerekli olan matematiksel nicelikler (sayılar, değişkenler, fonksiyonlar) olsun. $S_r = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ indirgenmiş sistemdir ve p_1, p_2,. . . p_m, de (S, Q, M) sisteminin parametreleridir.

Bu, durum değişkenlerinin gerçekten ilgilendiğimiz sistemin özelliklerini tanımladığını, sistem parametreleri ise durum değişkenlerini matematiksel olarak elde etmek için gerekli sistem özelliklerini tanımladığını gösterir.

Örneğin, yukarıdaki tank probleminde, maddenin kütlesiyle ilgileniyorduk; bu nedenle, bu örnekte bir durum değişkenine sahibiz, yani, $n = 1$ ve $s_1 = X$.

s_1'i elde etmek için c konsantrasyonunu kullandık; bu nedenle, bu örnekte bir sistem parametresine sahibiz, yani, $m = 1$ ve $p_1 = c$. Bu durumda indirgenmiş sistem $S_r = \{c\}$ dir.

Tanım olarak, indirgenmiş sistem, durum değişkenini elde etmek için ihtiyaç duyduğumuz sistem hakkındaki tüm bilgileri içerir, yani Q'ya cevap verir.

Teneke örneğinde, Q'ya cevap vermek için tenekenin yüzey alanına ihtiyaç duyduk, yani bu durumda yine bir durum değişkenine s_1=A sahip olduk.

Diğer taraftan, s_1'ielde etmek için iki sistem parametresi p_1 = r ve p_2 = h'ye ihtiyaç duyulmuştur, yani bu durumda indirgenmiş sistem S_r = {r, h} 'dir.

(Deneylerin önemi) Tipik olarak, indirgenmiş sistemin özellikleri (parametreleri) deneysel karakterizasyona ihtiyaç duyanlardır. Bu şekilde, modelleme prosedürü, deneyleri yönlendirir ve deneyciyi gereksiz kılmak yerine (sıkça yanlış anlaşılma), deneycinin gereksiz deneylerden kaçınmasına yardımcı olur.

Örnekler ve Bazı Diğer Tanımlar

Bilgisayar Yazılımı Kullanma

Yukarıdaki “1lt teneke” örneğiyle ilgili birkaç inceleme yapalım. Bu örneğin arkasındaki matematik problemi, yazılım kullanılarak kolayca çözülebilir. Örneğin, bilgisayar yazılımı Maxima kullanarak, sorun aşağıdaki gibi çözülebilir:

```
1: A(r):=2 *%pi *r ^ 2 +2/r;
2: define(A1(r),diff(A(r),r));
3: define(A2(r),diff(A1(r),r));
4: solve(A1(r) =0);
5: r:rhs(solve(A1(r)=0)[3]);
6: r,numer;
7: A2(r)>0,pred;
```

Örnekler ve Bazı Diğer Tanımlar

Problem Çözme Şeması

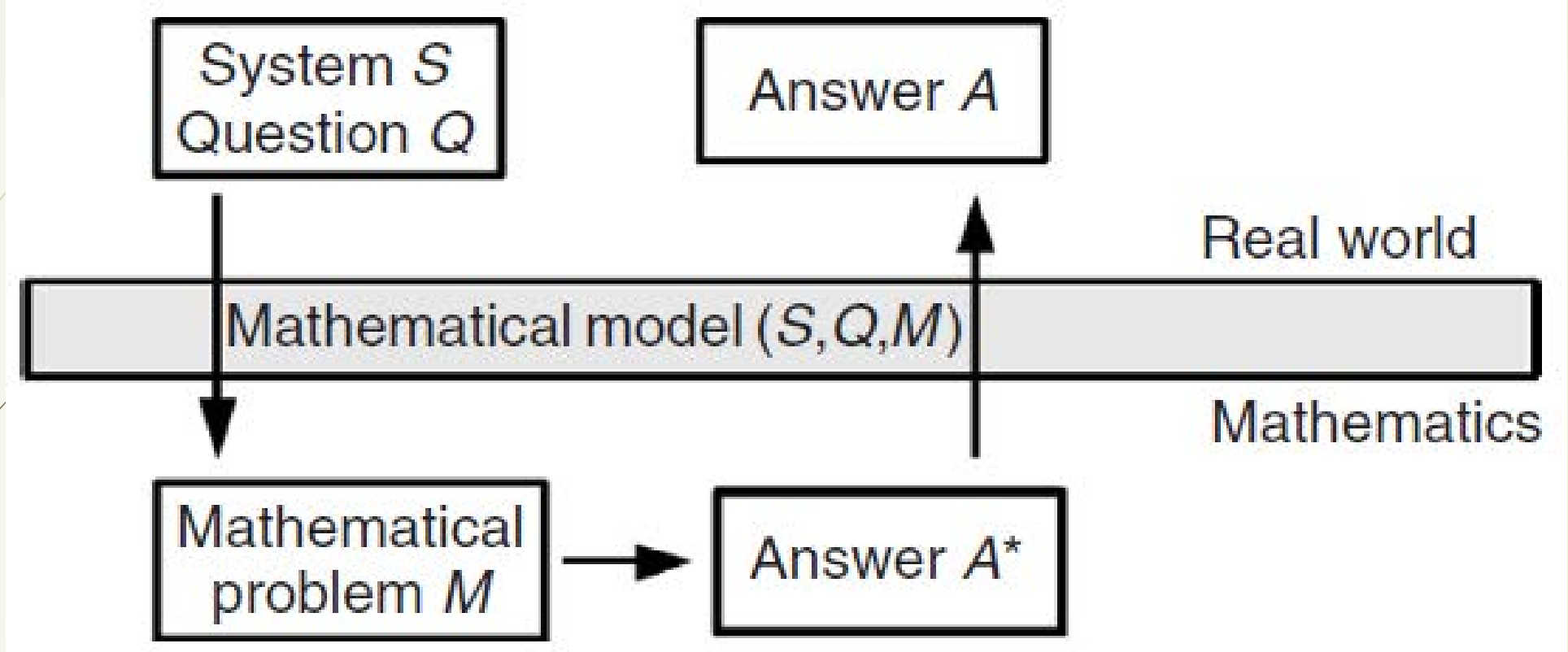
Bir yandan matematik bir modelin formülasyonu ile bir yandan elde edilen matematik probleminin çözümü, diğer taraftan uygun yazılım ile yapılabilenler arasında açıkça ayırt edilebilir.

Bu, matematik modellerle çalışmak isteyen birisinin profesyonel bir matematikçi olmasının gerekli olmadığı anlamına gelir. Tabii ki matematik uzmanlığa sahip olmak yararlıdır. Matematik uzmanlık, eğer birisi daha gelişmiş problemleri çözmek isterse, ya da birisi matematiksel yazılımla elde edilen sonuçların gerçekten asıl sorunların çözümlerinden ve sayısal eserlerden olmamasından emin olmak isterse, özellikle önemlidir.

Teneke örneği matematik modellemenin bir başka önemli avantajını göstermektedir.

Teneke problemi matematiksel olarak formüle edildikten sonra, hesaplamanın güçlü ve köklü matematiksel yöntemleri uygulanabilir hale geldi.

Uygun yazılımı kullanarak, sorun az çaba ile çözülebilir. Bu problemin matematik modeli olmadan, diğer yandan, bu problemin deneysel bir çözümü çok daha fazla zaman alacaktır.



Problem çözme şeması

Başlangıç noktası, sistem (S) ile ilgili bir soru (Q) ile birlikte gerçek dünyadaki bir sistem (S)'dir.

(S, Q, M) matematik modeli daha sonra güçlü matematiksel yöntemler kullanarak problemin çözülebildiği “matematik evren” e girer.

Bu, matematiksel terimlerle (A*)’nın problem çözümünü sağlar, bu da son adımda orijinal soruya (Q) bir cevap olarak A'ya çevrilir.

Problem çözme şemasının olduğu şekilde matematiğin rolü bir metro treni gibi tarif edilebilir: çünkü gerçek dünyada istenen A cevabına ulaşmak için Q sorusu ve S sisteminden yola çıkmanın çok uzun ve zor bir yol olacağıdır.

Akıllı problem çözücüleri, güçlü matematiksel yöntemlerin problem çözümüne hızlı çözüm sağladığı, "matematik temel" e girer.

Örnekler ve Bazı Diğer Tanımlar

Basit Modeller Kurma Stratejileri

Birçok durumda, matematik bir model oluşturmak için basit üç adımlı bir prosedür kullanılabilir.

(Model oluşturmak için üç adım)

- Adım 1: Bilinmeyenlerin sayısını, yani problemde belirlenmesi gereken miktarların sayısını belirleyin. Birçok problem formülasyonunda, sorunun sorulduğu son cümleyi okumalısınız.
- Adım 2: Birimler de dahil olmak üzere bilinmeyenlerin kesin tanımlarını verin. Bu, 1. adımla birlikte toplanmaması gereken pratik bir deneyimdir.
- Adım 3: Problem formülasyonunu cümle cümle okumak, bu bilgiyi 2. adımda tanımlanan bilinmeyenleri içeren matematiksel ifadelere dönüştürmek.

Problem 1:

A ve B sıvıları sırasıyla 50 g/lt ve 80 g/lt içeriyorsa, 70 g/lt'lik bir madde içeren 150 lt'lik bir C sıvısı elde etmek için hangi hacimlerde A ve B sıvıları karıştırılmalıdır?

$$x + y = 150$$
$$50x + 80y = 70 \cdot 150$$

Bunu yukarıdaki Problem 1'e uygulayalım.

1.ve 2. adımda, Problem 1’in aşağıdaki gibi tanımlanan iki bilinmeyeni sorduğunu belirleyeceğiz.

- x: karışımdaki A sıvısının hacmi [l]
- y: karışımdaki B sıvısının hacmi [l]

Bu adımlar önemlidir çünkü bize denklemlerde kullanılabilecek bilinmeyenler hakkında bilgi verirler. Bilinmeyenler bizim için bilinmediği sürece, 3. adımda anlamlı denklemleri yazmak zor olacaktır.

Gerçekten de, matematik modellemede, yeterince iyi tanımlanamayan bilinmeyenleri içeren denklemleri yazmak, sıkça yeni başlayanlar tarafından yapılan bir yanlıştır.

İnsanlar genellikle yukarıdaki problem 1'deki A, B, C gibi problem formülasyonlarında görünen sembolleri alırlar ve denklemi şu şekilde yazarlar.

$$50A + 80B = 70$$

Bu denklem neredeyse doğrudur, ancak bilinmeyenlerin kesin tanımlarından yoksun olduğumuz sürece doğruluğunu kontrol etmek zordur.

50A + 80B = 70 gibi denklemlerdeki asıl sorun, problem formülasyonunda A, B, C'nin zaten tanımlanmış olması gerçeğinde yatmaktadır.

Burada, 50A + 80B = 70'de sıvıların hacimlerini ifade etmek için (dolaylı olarak) kullanılmasına rağmen, akışkanların isimlerine değinirler.

Şimdi aynı denklemi, yukarıda tanımlanan x ve y bilinmeyenlerini kullanarak yazalım:

$$50x + 80y = 70$$

Şimdi bu denklemi kontrol etmek için x ve y'nin tanımları kullanılabilir.

Burada gördüğümüz şey, 50x + 80y = 70'in sol tarafında, 50 g/l’nin x [l] ile çarpılmasından elde edilen birimdir (gram). Ancak sağ tarafta, birim g/l’dir.

Yani denklemin farklı taraflarında farklı birimler var, ki bu yanlış bir denklem olduğunu kanıtlıyor. Aynı zamanda, birimlerin bir karşılaştırması, doğru bir denklem elde etmek için yapılması gerekenler hakkında bir fikir edinmemize yardımcı olabilir.

Bu durumda, sağ tarafın litre olarak ifade edilen miktar ile çarpılmasının birim problemini çözeceği açıktır.

Problem formülasyonundaki bu türdeki tek büyüklük, karışımın hacmi olarak gereken 150 litrelik hacimdir ve 70'i 150 ile çarparak bu durumda problemi çözmektedir.

3. adımdaki önemli bir sorun, denklemler, eşitsizlikler vb. gibi matematiksel ifadelere karşılık gelen problem formülasyonundaki bu ifadeleri tanımlamaktır. Aşağıdaki not, bunun için genel bir kılavuz olarak alınabilir:

(Denklemler nerede?)

Denklemler, eşitsizlikler ve benzerleri gibi matematiksel ifadelere dönüştürülebilen problem formülasyonunun ifadeleri, bilinmeyenlerin değerlerine kısıtlamalar getirmeleriyle karakterize edilir.

Bu stratejinin ışığında yukarıdaki Problem 1'deki ifadelerin bazılarını inceleyelim:

- Açıklama 1: 150 l sıvı C gereklidir.
- Açıklama 2: Akışkan A, maddenin 50 g/l’sini içerir.
- Açıklama 3: Akışkan B, maddenin 80 g/l’sini içerir.
- Açıklama 4: Akışkan C, maddenin 70 g/l’sini içerir.

Açıkçası, 1. ifade, hemen denkleme çeviren x ve y'nin değerleri üzerinde bir kısıtlamadır:

$$x + y = 150$$

Öte yandan açıklama 2 ve açıklama 3, bilinmeyenler hakkında herhangi bir kısıtlama getirmemektedir.

x ve y'nin rasgele değerleri, A ve B sıvılarının sırasıyla 50 g/l ve 80 g/l içerdiği gerçeğiyle uyumludur.

Bununla birlikte, açıklama 4, x ve y üzerinde bir kısıtlama getirmektedir.

Örneğin, bir x değeri verildiğinde, C sıvısında 70 g/l'lik bir konsantrasyon sadece y'nin belirli bir değeri için gerçekleştirilebilir.

Matematiksel olarak, açıklama 4 şu şekilde ifade edilebilir

$$50x + 80y = 70 \cdot 150$$

Bu denklemi hemen yazabilirsiniz. Bunu yapmakta sorun yaşarsanız, problem formülasyonundaki ifadeye olabildiğince yakın, sezgisel (yani %100 matematiksel olmayan) bir prosedürü takip edebilirsiniz.

Bu durumda, açıklama 4'ü şu şekilde ifade ederek başlayabiliriz.

{C akışkanı içindeki maddenin konsantrasyonu} = 70

Daha sonra, konsantrasyon tanımını aşağıdaki gibi kullanabiliriz:

$$\frac{\{C\ akışkanı\ içindeki\ maddenin\ kütlesi\}}{\{Karışımın\ hacmi\}} = 70$$

Bir sonraki adım iki şeyi tespit etmek olacaktır:

- C sıvısı içindeki maddenin kütlesi A ve B akışkanlarından gelir.
- Karışımın hacmi 150 l'dir.

$$\frac{\{A\ akışkanı\ içindeki\ maddenin\ kütlesi\} + \{B\ akışkanı\ içindeki\ maddenin\ kütlesi\}}{\{Karışımın\ hacmi\}} = 70$$

A ve B'deki madde kütleleri, yukarıdaki Problem 1'de verilen konsantrasyonlar kullanılarak kolayca elde edilebilir:

$$\frac{50x + 80y}{150} = 70$$

(Matematiksel ifadeleri kurmak için Sezgisel prosedür)

Bir problem formülasyonundaki bir ifadeyi bir denklem veya eşitsizlik gibi bir matematiksel ifadeye çevirmek istiyorsanız, problem formülasyonundaki ifadeyi olabildiğince yakından taklit ederek başlayın. İlk formülasyonunuz, matematiksel olmayan ifadeler içerebilir. Daha sonra, tüm matematiksel olmayan ifadeleri, bilinmeyenleri içeren ifadelerle değiştirmeyi deneyin.

Örnekler ve Bazı Diğer Tanımlar

Basit Modeller Kurma Stratejileri - Karışım Problemi

Problem 2:

A, B, C, D akışkanlarının aşağıdaki tabloya göre S_1, S_2, S_3 maddelerini içerdiğini varsayalım (litre başına gram cinsinden konsantrasyonlar):

	A	B	C	D
S_1	2.5	8.2	6.4	12.7
S_2	3.2	15.1	13.2	0.4
S_3	1.1	0.9	2.2	3.1

Sırasıyla % 75 (hacimce yüzde) A ve B sıvıları içeren ve S_1 ve S_2 maddelerinden 4 g/l ve 5 g/l içeren bu sıvıların karışımındaki S_3 konsantrasyonu nedir?

Üç adımlı prosedürün 1. ve 2. adımlarına atıfta bulunarak, burada tanımlanabilecek tek bir bilinmeyenimiz vardır:

- x: karışımdaki S_3 konsantrasyonu (litre başına gram (g/l))

Şimdi 3. adım, x'i içeren matematiksel ifadeleri yazmamızı gerektirir.

Bu türden üç ifade şöyle tanımlanabilir:

- Açıklama 1: Karışımın % 75'i A ve B'den oluşmaktadır.
- Açıklama 2: Karışım 4 g/l S_1 içerir.
- Açıklama 3: Karışım 5 g/l S_2 içerir.

Bu ifadelerin her biri çok sayıda olası karışımı içermez ve bu nedenle x üzerinde bir kısıtlama getirir.

Açıklama 1 ile başlayarak, bu ifadenin x cinsinden formüle edilemeyeceği açıktır.

Problem formülasyonunu matematiğe çevirmek için bir dizi yardımcı değişkenin gerekli olduğu bir durum söz konusu.

(Yardımcı değişkenler) Bazı durumlarda, bir problemin matematiğe çevrilmesi, yardımcı değişkenlerin kullanılmasını gerektirebilir. Bu değişkenler bilinmeyenleri belirlememize yardımcı olmaları açısından "**yardımcı**" dır.

Genellikle, problem formülasyonu, yardımcı değişkenler ve bilinmeyenlerin belirlenebileceği şekilde yeterli bilgiyi sağlayacaktır (diğer bir deyişle yardımcı değişkenler sadece denklemler sisteminin boyutunu artıracaktır).

Bu durumda, aşağıdaki yardımcı değişkenlere ihtiyaç duyuyoruz:

- x_A: karışımdaki A sıvısının yüzdesi (hacme göre)
- x_B: karışımdaki B sıvısının yüzdesi (hacme göre)
- x_C: karışımdaki C sıvısının yüzdesi (hacme göre)
- x_D: karışımdaki D sıvısının yüzdesi (hacme göre)

Şimdi yukarıdaki Açıklama 1 kolayca ifade edilebilir.

$$x_A + x_B = 0{,}75$$

Yukarıdaki gibi, Açıklama 2 ve Açıklama 3, aşağıdaki gibi formüle edilebilir

{Karışımdaki S_1 konsantrasyonu} = 4

ve

{Karışımdaki S_2 konsantrasyonu} = 5

Yukarıdaki tabloda verilen bilgilere dayanarak (ve bir önceki bölümde olduğu gibi yine benzer bir prosedür izlenerek), bu denklemler

$$2{,}5x_A + 8{,}2x_B + 6{,}4x_C + 12{,}7x_D = 4$$

ve

$$3{,}2x_A + 15{,}1x_B + 13{,}2x_C + 0{,}4x_D = 5$$

Karışımdaki S_3 konsantrasyonu x olduğundan, benzer bir argüman gösterilmektedir.

$$1{,}1x_A + 0{,}9x_B + 2{,}2x_C + 3{,}1x_D = x$$

Şimdiye kadar dört denklemimiz ve beş bilinmeyenimiz var x, x_A, x_B, x_C ve x_D, yani bir denklem daha lazım. Bu durumda, eksik denklem, x_A, x_B, x_C ve x_D nin tanımı ile dolaylı olarak verilir. Bu değişkenler yüzde değerlerini ifade eder ve dolayısıyla

$x_A + x_B + x_C + x_D = 1$ dir.

Tamamen şu anda aşağıdaki lineer denklem sistemlerini elde ettik:

$$x_A + x_B = 0{,}75$$

$$2{,}5x_A + 8{,}2x_B + 6{,}4x_C + 12{,}7x_D = 4$$

$$3{,}2x_A + 15{,}1x_B + 13{,}2x_C + 0{,}4x_D = 5$$

$$1{,}1x_A + 0{,}9x_B + 2{,}2x_C + 3{,}1x_D = x$$

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 1$$

Örnekler ve Bazı Diğer Tanımlar

Lineer (doğrusal) Programlama

Şimdiye kadar ele alınan tüm matematik modeller sadece denklemler açısından formüle edilmiştir. Bir matematik model, her türlü matematiksel ifadeyi içerebilir. Örneğin, eşitsizlikler içerebilir.

Eşitsizlikleri içeren en basit problem sınıflarından biri, sıkça kullanılan, örneğin yöneylem araştırmalarında, doğrusal programlama problemleridir.

Wikipedia.org'un doğrusal programlama makalesinden alınan aşağıdaki problemi düşünün:

Doğrusal programlama örneği

Bir çiftçinin A kilometrekare büyüklüğünde bir çiftlik arazisine sahip olduğunu varsayalım, bu araziye ya buğday ya arpa ya da ikisinin bir kombinasyonu ile dikilecek olsun. Ayrıca, çiftçinin, buğday (F_1, P_1) ve arpa (F_2, P_2) için birim alan başına farklı miktarlarda gerekli olan, kullanılabilecek sınırlı miktarda F gübresi ve P böcek ilacına sahip olduğunu varsayalım. S_1 buğdayın ve S_2 arpanın satış fiyatı olsun. Geliri en üst düzeye çıkarmak için buğday ile arpa kaç kilometrekareye dikilmelidir?

Buğday ve arpa ekilen alanı sırasıyla x_1 ve x_2 ile ifade ederek problemi şu şekilde formüle edebiliriz:

$x_1, x_2 \geq 0$ (çiftçi negatif alan ekemez)
$x_1 + x_2 \leq A$
(verilen A kilometrekare çiftlik arazisinden daha fazla bir alan kullanılamaz)
$F_1x_1 + F_2x_2 \leq F$ (gübre sınırları)
$P_1x_1 + P_2x_2 \leq P$ (böcek ilacı sınırları)
$S_1x_1 + S_2x_2 \rightarrow$ maks. (gerekli gelir maksimizasyonu)

S → Çiftlik

Q → Geliri en üst düzeye çıkarmak için buğday ile arpa kaç kilometrekareye dikilmelidir?

M → Yukarıdaki denklemler

Bir matematik model (S, Q, M) elde edilir.

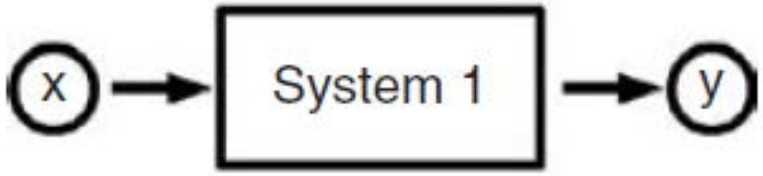
Örnekler ve Bazı Diğer Tanımlar

Kara Kutu Sisteminin Modellenmesi

Bilim adamları veya mühendisler tarafından incelenen sistemlerin genellikle, verilen giriş parametrelerini çıkış parametrelerine dönüştüren anlamına gelen "giriş-çıkış sistemleri" olduğu daha önce belirtilmişti.

Teneke örneğinde, tenekenin yarıçapı ve yüksekliği giriş parametreleri ve tenekenin yüzey alanı çıktı parametresidir.

Örnek bir girdi-çıktı sisteminin daha ayrıntılı olarak araştırılması, bizi şimdi daha önemli kavram ve tanımlara götürecektir. Verilen her giriş gücü x [N] için bir çıkış uzunluğu y (santimetre) üreten şekildeki gibi bir "sistem 1" varsayalım.



(a)

x (N)	10	20	30	40	50
y (cm)	3	5	11	12	16

(b)

(a) Sistem 1 - Giriş x(N) ve çıkış y(cm)
(b) Sistem 1 - Veriler

Ayrıca, sistemin içinde x’i y’ye dönüştüren süreçleri bilmediğimizi varsayalım, yani bu sistem yukarıda açıklandığı gibi bir “kara kutu” olsun.

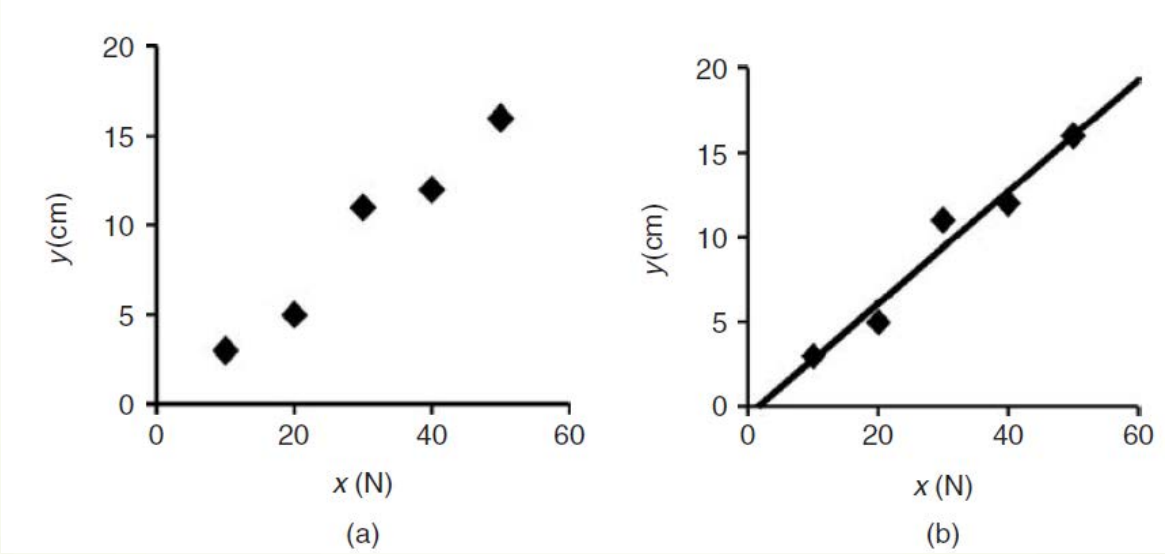
Aşağıdaki problemi düşünün:

Q : y = 20 cm'lik bir çıkış üreten bir giriş x bulun.
S : Sistem 1

Şimdi Q'ya cevap vermemize yardımcı olabilecek uygun matematiksel ifadeler (M) arıyoruz.

Sistem 1'in araştırmacısının yapabileceği şey sistemi kullanarak bazı veriler üretmek olacaktır tabi ki bu verilerin “kara kutu” içinde meydana gelen süreçlerle ilgili bir şey ortaya çıkaracağını umarak. Ne olduğunu görmek için araştırmacı muhtemelen şekildeki gibi bir grafikler çizecektir.

(a) Verilerin çizimi



(b) Regresyon hattına sahip sistem 1 verileri.

Matematiksel olarak, bu verilerin arkasındaki y=f(x) fonksiyonun düz bir çizgi olduğu anlamına gelir:

$f(x) = ax + b$

Şimdi araştırmacı, bu denklemin a ve b katsayılarını veriden saptamak için lineer regresyon adı verilen bir istatistiksel yöntem uygulayabilir ve sonuçta

$f(x) = 0{,}33x – 0{,}5$

“regresyon doğrusu” nu elde eder.

Şekil b, bu regresyon doğrusu ve veriler arasında iyi bir tesadüfün ya da istatistiksel terminolojiye göre iyi bir “uygun” luğun olduğunu göstermektedir.

$f(x) = 0{,}33x - 0{,}5$

artık sistem 1'in matematik modelinin M'si olarak kullanılabilir.

Yukarıda belirtilen Q sorusu (Hangi x sistem girdisi istenen y = 20 cm çıktısını üretir?) fonksiyonda y=f(x)=20 değeri konularak kolayca yanıtlanabilir, yani

$20 = 0{,}33x - 0{,}5$

buradan $x \approx 62{,}1$ N bulunur.

Tabii ki, bu birkaç nedenden dolayı sadece yaklaşık bir sonuçtur.

Her şeyden önce, şekil, regresyon doğrusu ve veriler arasında bazı sapmalar olduğunu göstermektedir. Bu sapmalar ölçüm hatalarına bağlı olabilir, ancak gerçekten mevcut olan bazı etkileri de yansıtabilir.

Örnek, matematik modellemede istatistiksel yöntemlerin önemini göstermektedir.

Her şeyden önce, istatistik, verileri tanımlamak veya verilerden çıkarımlar çıkarmak için kullanılabilecek matematik modellerin bir derlemesidir.

Bunun ötesinde, istatistiksel yöntemler, istatistiksel olmayan matematik modeller ile gerçek dünya arasındaki gerekli bağlantıyı sağlar.

matematik modellemede, istatiksel yöntemler, sadece model tahminlerini doğrulamak için değil, aynı zamanda uygun denklemlerin oluşturulmasına yardımcı olan sistem hakkında hipotezler geliştirmek için de her zaman deneysel verilerle ilgilenir,.

Örnekte, veriler bizi x ve y arasında doğrusal bir ilişki olduğu hipotezine götürdü.

Daha Fazla Tanımlar

Fenomenolojik (Görüngüsel) ve Mekanistik Modeller

Sistem 1'i tanımlamak için yukarıda kullanılan matematik model, yalnızca deneysel verilere dayanılarak oluşturulduğundan, ‘’sistemi bir kara kutu olarak işlediğinden yani sistem 1 içinde x y'ye dönüşürken sistem içinde meydana gelen iç süreçler hakkında herhangi bir bilgi kullanmadan’’ fenomenolojik bir model olarak adlandırılır.

Öte yandan, sistem S hakkında bilgi kullanılarak inşa edilen modellere mekanistik modeller denir, çünkü bu tür modeller hemen hemen S'nin iç mekaniğine bakmaktadır.

(Fenomenolojik ve mekanistik modeller)

Bir matematik model (S, Q, M),

- fenomenolojik, eğer S hakkında bir ön bilgi kullanılmadan, sadece deneysel verilere dayanılarak yapıldıysa,

- mekanistik, eğer M'deki bazı ifadeler S hakkında bir ön bilgiye dayanıyorsa,

olarak adlandırılır.

Fenomenolojik modeller, ampirik modeller, istatistiksel modeller, veriye dayalı modeller veya kara kutu modelleri olarak da adlandırılır.

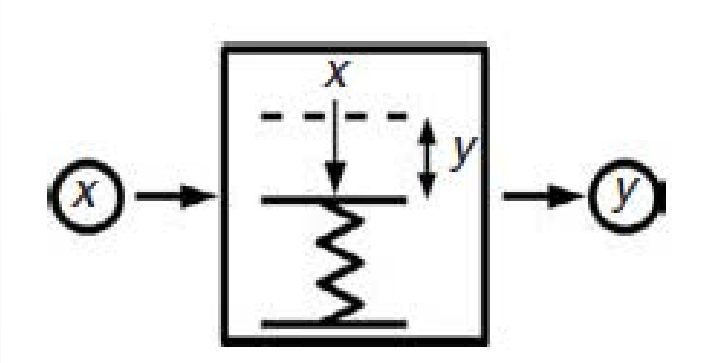
S ile ilgili tüm gerekli bilgilerin bulunduğu mekanistik modellere beyaz kutu modelleri de denir.

Çoğu mekanistik modeller, aşırı siyah ve beyaz kutu durumları arasında bir yerde bulunur, yani S hakkında bazı bilgilere dayanır, diğer bazı önemli bilgiler ise kullanılamaz. Bu modellere bazen gri kutu modelleri veya yarı deneysel modeller denir.

Sistem 1'in mekanik bir yay olduğunu, x'in bu yaya etki eden bir kuvvet olduğunu ve y'nin sonuçta meydana gelen uzama olduğunu varsayın. Bu, şimdi sistem 1 ile ilgili bir ön bilgidir ve temel fiziksel bilgiye dayanan bir mekanistik matematik modeli oluşturmak için kullanılabilir.

Mekanik yaylar Hooke yasasıyla açıklanabilir.

$x = k \cdot y$



Şimdi aşağıdaki mekanistik matematik model (S, Q, M) elde edilir:

- S: Sistem 1
- Q: Hangi x sistem girdisi, y = 20 cm'lik istenen bir çıktı üretir?
- M: $x = k \cdot y$

Sistem 1'in mekanistik modeli, fenomenolojik modele kıyasla bazı önemli avantajlara sahiptir ve bu avantajlar, mekanistik yaklaşımın karakteristik avantajlarıdır.

Mekanistik modeller ayrıca modifiye edilmiş sistemlerin daha iyi tahmin edilmesine de izin veriyor.

Mekanistik modellerin bir diğer avantajı, genellikle fiziksel olarak yorumlanabilir parametreleri, yani sistemin gerçek özelliklerini temsil eden parametreleri içermeleridir.

(Fenomenolojik’e karşı mekanistik)

Fenomenolojik modeller evrensel olarak uygulanabilir, kurulumu kolaydır, ancak kapsamı sınırlıdır.

Mekaniksel modeller genellikle fiziksel olarak yorumlanabilir parametreleri içerir, sistem performansı ve daha iyi tahminler hakkında daha derinlemesine bilgi sağlar, ancak bunlar sistem hakkında ön bilgi gerektirir ve çoğu zaman daha fazla zamana ve kaynağa ihtiyaç duyarlar.

Daha Fazla Tanımlar

Durağan ve Durağan Olmayan Modeller

(Durağan / Durağan olmayan modeller)

Bir matematik model (S, Q, M)

•Sistem parametrelerinden veya durum değişkenlerinden en az biri zamana bağlıysa durağan olmayan,

•Aksi halde durağan,

olarak adlandırılır.

Daha Fazla Tanımlar

Dağıtılmış ve Yığık modeller

(Dağıtılmış / yığık modeller)

Bir matematik model (S, Q, M)

•Sistem parametrelerinden veya durum değişkenlerinden en az biri bir alan değişkenine bağlıysa dağıtılmış,

•Aksi halde yığık,

model olarak adlandırılır.

Matematik Modellerin Sınıflandırılması

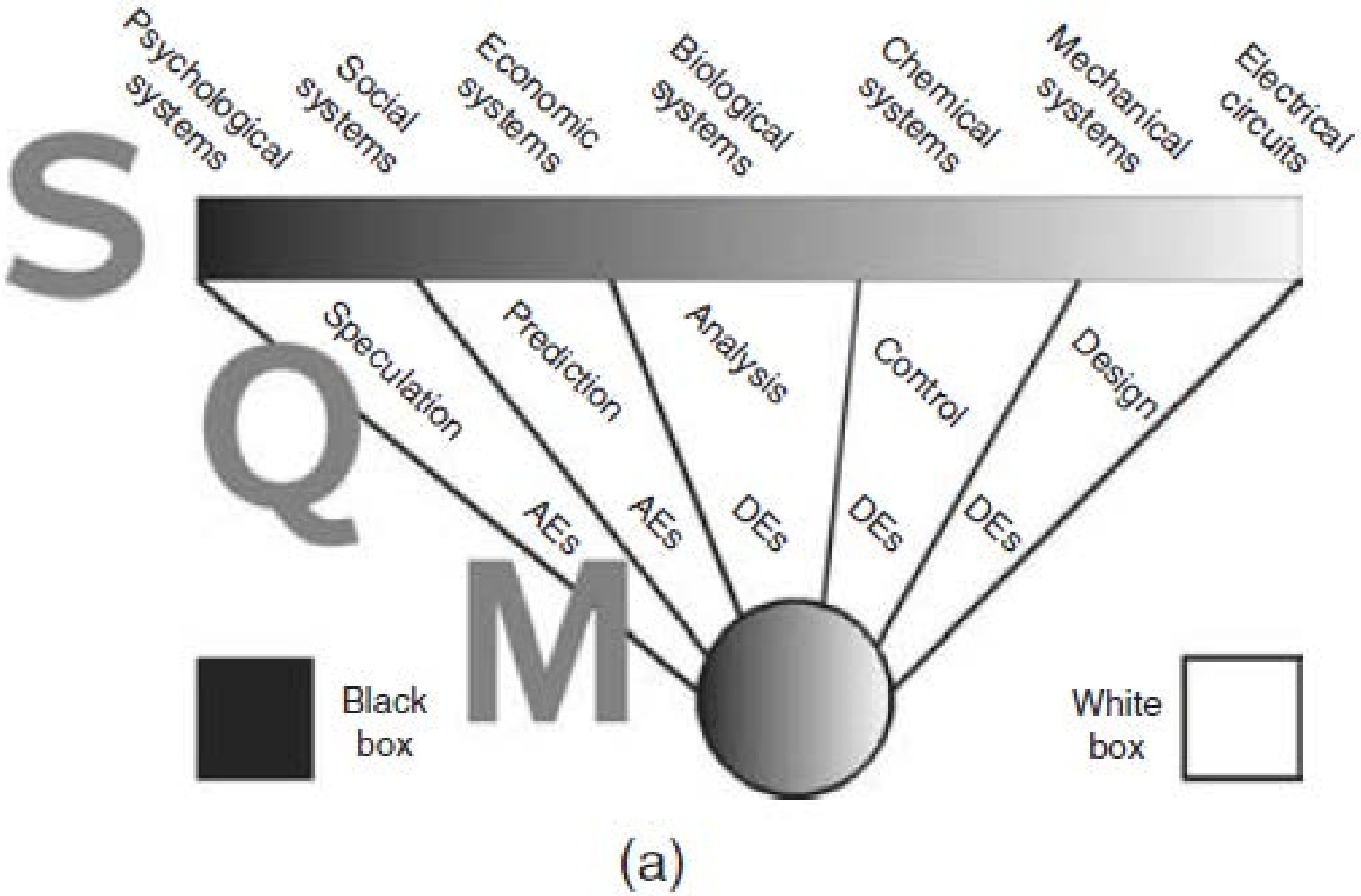
Matematik modellerin sınıflamasının pratik kullanımı, matematik modeller alanında “nerede olduğunuzu” ve halihazırda kullandığınız modellerin ötesinde sorununuza hangi tip modellerin uygulanabileceğini anlamış olmanızdır.

Matematik Modellerin Sınıflandırılması

Siyah Kutu Modellerinden Beyaz Kutu Modellerine

Matematik modellerin alanı, doğal olarak, bir matematik modelin bir S sistemi, bir Q sorusu ve bir M matematiksel ifadeler kümesinden oluşan üçlü (S, Q, M) olarak tanımladığımız tanımından evrimleşmektedir.

Bu tanıma dayanarak, matematik modelleri SQM uzayında sınıflandırmak doğaldır.



(a)

(a) Siyah ve beyaz kutu modelleri arasındaki matematik modellerin sınıflandırılması.

Şekilde, bir matematik modelin üç boyutu (S, Q, M) görülmektedir:

Sistemler (S), çubuğun hemen üstünde sınıflandırılmıştır. Çubuğun hemen altında, bölümlerin her birinde bulunan matematik modellerin (ki bu Q) sahip olabileceği bir hedefler listesi vardır.

Alt uçta, cebirsel denklemlerden (AEs) diferansiyel denklemlere (DEs) kadar ilgili matematiksel yapılar (M) bulunur.

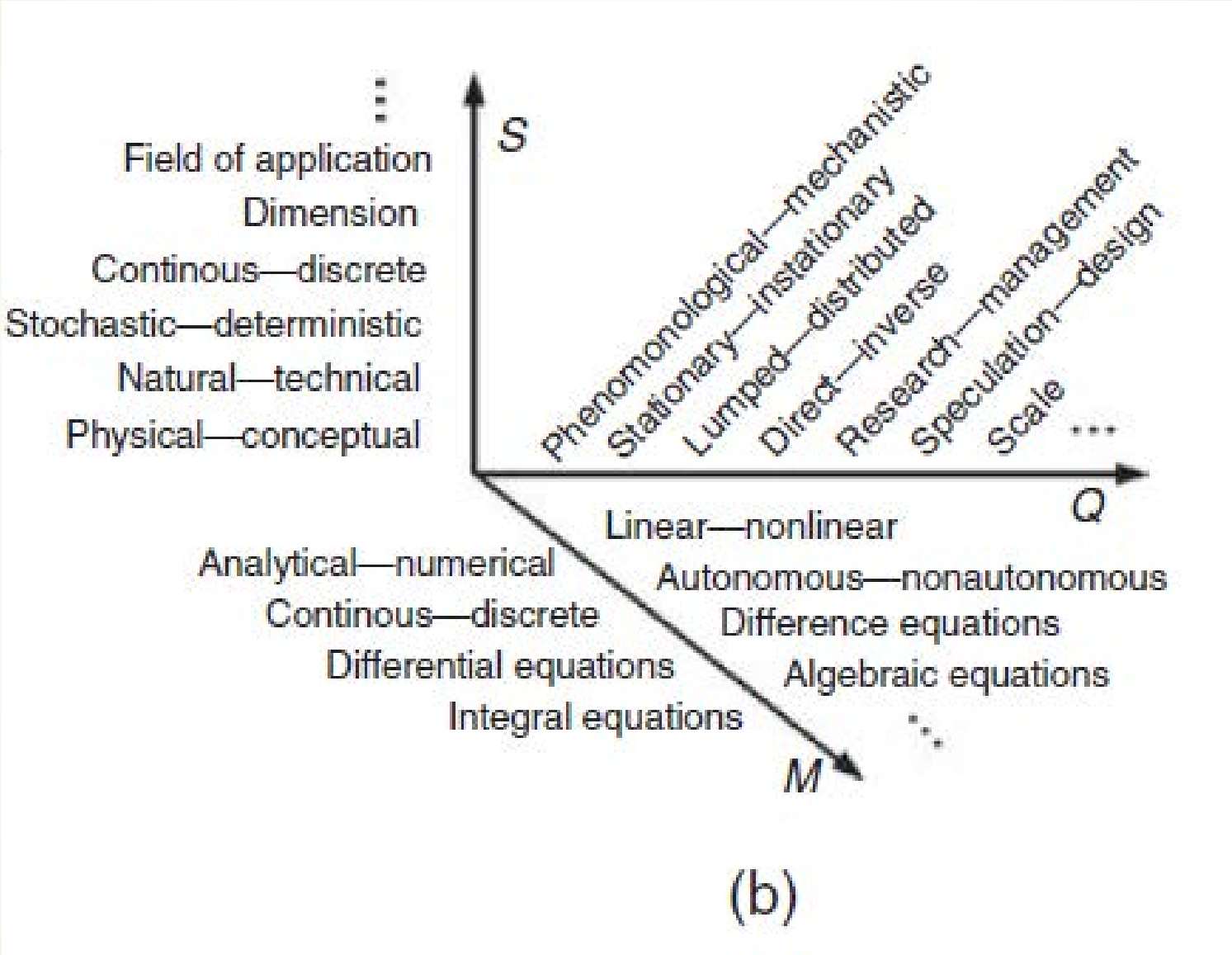
$f(x) = ax + b$, cebirsel denklemlerin bir örneğidir.

Matematik Modellerin Sınıflandırılması

SQM Uzayının Sınıflandırılması: S Ekseni

Matematik modeller, ilgili bireysel S, Q ve M değerleri ile karakterize edildiğinden, her modelin, SQM uzayında bir yere yerleştirildiğini de düşünebiliriz.

Şeklin S-, Q- ve M- eksenlerinin her birinde, matematik modeller, literatürde çeşitli sınıflandırma girişimlerine dayanarak derlenen bir dizi kritere göre sınıflandırılmıştır.



(b) SQM uzayında matematik modellerin sınıflandırılması.

Fiziksel - kavramsal.

Fiziksel sistemler, örneğin bir balık veya bir araba gibi gerçek dünyanın bir parçasıdır. Kavramsal sistemler, örneğin bir dizi matematiksel aksiyomdan oluşan düşünce ve fikirlerden oluşur. Tamamen fiziksel sistemlere odaklanıyoruz.

Doğal - teknik.

Doğal olarak, doğal bir sistem bir balık veya bir çiçek gibi doğanın bir parçasıdır, teknik bir sistem ise bir araba, bir makine ve benzeridir.

Stokastik (raslantısal) – deterministik (belirli).

Stokastik sistemler zar atmak, hisse fiyatları ve benzeri gibi rasgele etkiler içerir.
Deterministik sistemler, hiç ya da çok az rastgele etkiler içerir, örneğin, gezegen sistemi, bir sarkaç ve benzeri gibi mekanik sistemler. Deterministik bir sistemde, sistemin belirli bir durumu (A) her zaman bir ve aynı B durumu tarafından takip edilirken, sistem stokastik olduğunda (A), B, C veya diğer durumlar tarafından öngörülemeyen bir şekilde takip edilebilir.

Sürekli - ayrık

Sürekli sistemler, bir şarap mayalandırıcısındaki şeker ve etanol konsantrasyonları gibi zamanla sürekli değişen miktarları içerir.

Diğer yandan, ayrık sistemler, sadece hayvan populasyonlarındaki birey sayısı gibi belirli zaman aralıklarında değişen miktarları içerir.

Şeklin M ekseninde, sürekli sistemlerin ayrık matematiksel ifadeler ve bunun tersi ile gösterilebileceğine (örn. Ayrık avcı-av sistemini tanımlamak için sürekli bir matematik formülasyon kullanılır) dikkat edin.

Boyut

Uzaysal simetrilerine bağlı olarak, fiziksel sistemler 1, 2 veya 3 uzay değişkenleri kullanılarak açıklanabilir. Fiziksel bir sistemi tanımlamak için kullanılan alan değişkenlerinin sayısı, o sistemin boyutu (sıklıkla 1D, 2D veya 3D olarak adlandırılır) olarak adlandırılır.

Uygulama alanı

Kimyasal sistemler, fiziksel sistemler, biyolojik sistemler ve benzerlerini ayırt edebiliriz.

Matematik Modellerin Sınıflandırılması

SQM Uzayının Sınıflandırılması: Q Ekseni

Fenomenolojik - mekanistik

Bu daha önce ayrıntılı olarak tartışılmıştır.

Durağan – durağan olmayan

Sabit (zamandan bağımsız) veya sabit olmayan (zamana bağlı) bir modelin uygun olup olmadığını sorduğumuz soruya (yani, bir (S, Q, M) matematiksel modelin Q'sunda) bağlıdır.

Yığık - dağıtılmış

Yığık (uzay değişkenlerinden bağımsız) veya dağıtılmış (uzay değişkenlerine bağlı) bir modelin uygun olup olmadığını sorduğumuz soruya (yani, bir (S, Q, M) matematik modelin Q'su) bağlıdır.

Doğrudan - ters.

Bir giriş-çıkış sistemi düşünün.

Eğer Q, verilen girdi ve sistem parametrelerini varsayıyor ve çıktıyı soruyorsa, model, doğrudan problemi çözer.

Öte yandan, Q, S'in girdi veya parametrelerini sorarsa, model, ters problemi çözer.

Eğer Q, S'in parametrelerini sorarsa, ortaya çıkan problem parametre tanımlama problemi olarak adlandırılır.

Eğer Q girdi parametrelerini sorarsa, ortaya çıkan probleme bir kontrol problemi de denir, çünkü bu durumda problem girdiyi istenen çıktıyı üretecek şekilde kontrol etmektir

Araştırma - yönetim

Araştırma modelleri eğer Q, S'nin anlaşılmasını hedefliyorsa kullanılır; öte yandan, yönetim modelleri, eğer odaklanma S ile ilgili pratik problemlerin çözümü üzerinde ise kullanılır.

Araştırma modelleri, pratik bakış açısından daha karmaşık ve daha az yönetilebilir olma eğilimindedirler.

Q'ye bağlı olarak, aynı matematiksel denklemler araştırma ya da yönetim modelinin bir parçası olabilir. Örneğin avcı-av modeli, eğer araştırmacı avcıların ve avların popülasyonundaki salınımlarını anlamak istiyorsa bir araştırma modelidir ve eğer avcı ve av popülasyonunu kontrol etmek için kullanıyorsa bir yönetim modelidir.

Spekülasyon - tasarım.

Ölçek.

Q'ye bağlı olarak, model, sistemi uygun bir ölçekte tanımlar. Örneğin, Q'ya bağlı olarak, gözenekli bir ortamın karmaşık kanalları boyunca akışkan parçacığını takip etmek veya sadece geçirgenliğine bağlı olarak gözenekli bir ortamdaki basınç düşüşünü hesaplamak uygun olabilir.

Açıktır ki, bu durumlar gözenekli bir ortamın iki ölçek (mikroskobik/makroskobik) üzerinde açıklanmasına karşılık gelir.

Matematik Modellerin Sınıflandırılması

SQM Uzayının Sınıflandırılması: M Ekseni

Doğrusal - doğrusal olmayan

Doğrusal modellerde, bilinmeyenler (veya türevleri), sadece toplama / çıkarma veya parametrelerle çarpma gibi doğrusal matematiksel işlemler kullanılarak birleştirilir.

Diğer taraftan, doğrusal olmayan modeller, bilinmeyenlerin çarpılması, transandantal fonksiyonların uygulanması ve benzerlerini içerebilir. Doğrusal olmayan modeller genellikle daha fazla (ve daha ilginç) çözümlere sahiptir, ancak çözülmesi daha zordur.

Analitik - sayısal.

Analitik modellerde, sistem davranışı, sistem parametrelerini içeren matematiksel formüller ile ifade edilebilir. Bu modellere dayanarak, parametrelerin nitel etkileri ve tüm sistem davranışları, parametreler için somut değerler kullanılmadan teorik olarak incelenebilir. Diğer taraftan, sayısal modeller, belirli parametre değerleri için sistem davranışını elde etmek için kullanılabilir.

Otonom – otonom olmayan

Bu, sabit olmayan modellerin matematiksel bir sınıflandırmasıdır. Eğer bir denklem açık bir şekilde zamana bağlı değilse, otonom olarak adlandırılır, aksi takdirde otonom olmayandır.

Sürekli - ayrık.

Sürekli modellerde, bağımsız değişkenler, belirli aralık içinde keyfi (tipik olarak gerçek) değerler alabilir. Örneğin, birçok adi diferansiyel denklem (ODE) modeli, bağımsız değişken olarak zamanı (belirli bir zaman aralığı içinde) kullanır. Ayrık modellerde ise, bağımsız değişkenler sadece bazı ayrık değerler alabilir.

Fark denklemleri

Fark denklemlerinde, ilgi miktarı bir ayrık değerler dizisi olarak elde edilir. Genellikle, bu, dizinin her teriminin önceki terimlere bağlı olduğu yineleme ilişkileri cinsinden ifade edilir. Fark denklemleri, sıklıkla ayrık sistemleri tanımlamak için kullanılır.

Diferansiyel denklemler.

Diferansiyel denklemler, bilinmeyen bir fonksiyonun türevlerini içeren denklemlerdir. Sürekli mekanik modeller kurmak için ana araçlardır.

İntegral denklemler.

İntegral denklemler bilinmeyen bir fonksiyonun integralini içeren denklemlerdir.

Cebirsel denklemler.

Cebirsel denklemler toplama, çıkarma, bölme ve benzeri gibi genel cebirsel işlemleri içeren denklemlerdir.