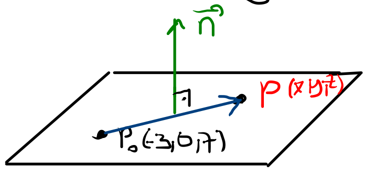
ÖRNEKLER

1) $(-3,0,7)$ noktasından geçen ve $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.



$$\overrightarrow{P_0P} = (x+3)\vec{i} + y\vec{j} + (z-7)\vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{n}\cdot(\overrightarrow{P_0P}) = 0 \Rightarrow (x+3) + 2y - (z-7) = 0$$

$$\boxed{x + 2y - z + 10 = 0}$$ Düzlemin denklemi

2) Bir düzlemin denklemi $2x + 3y - z = 4$ ile veriliyor. Düzleme normal olan bir vektör ve düzlem üzerinde bir nokta bulunuz.

$$\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\downarrow$$

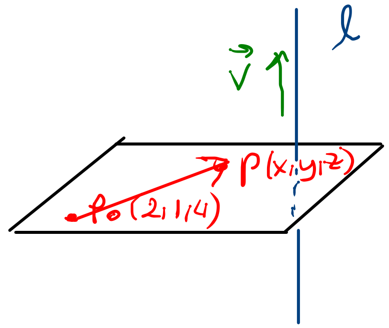
$$D = (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)$$

$$2\cdot \underset{2}{x_0} + 3\cdot \underset{1}{y_0} - \underset{3}{z_0} = 4$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ y_0 &= 1 \\ z_0 &= 3 \end{aligned}\right\} P_0(2,1,3)$$

3) $P_0(2,1,4)$ noktasından geçen ve skaler parametrik denklemleri

$$\left.\begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 1+2t \\ z &= 3 \end{aligned}\right\}$$ olan ℓ doğrusuna dik düzlemin denklemini bulunuz.



$$\ell: \quad \begin{aligned} x &= x_0 + t v_1 \\ y &= y_0 + t v_2 \\ z &= z_0 + t v_3 \end{aligned}$$

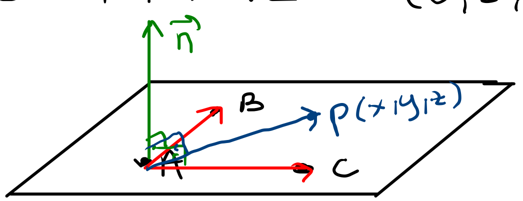
$$\vec{n} = \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-4)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = (x-2) + 2(y-1) = 0$$

$$x + 2y - 4 = 0$$

4) $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$ ve $C(0,3,0)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.



$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$\overrightarrow{AP} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z-1)\vec{k}$

$\vec{n}.(\overrightarrow{AP}) = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 6(z-1) = 0$

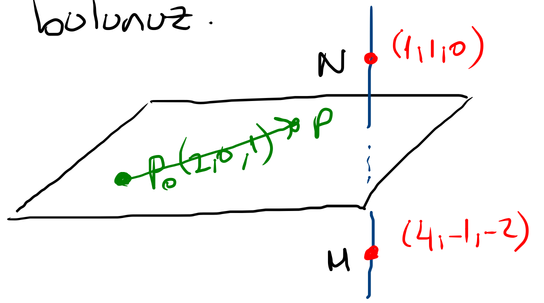
$3x + 2y + 6z - 6 = 0$

$3x + 2y + 6z = 6 \rightarrow$ Standart form

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1 \rightarrow$ kesen form.

$$\left.\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\right\}$$

5) (2,0,1) noktasından geçen ve (1,1,0), (4,-1,-2) noktalarından geçen doğruya dik olan düzlemin denklemini bulunuz.



$\vec{n} = \overrightarrow{MN} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

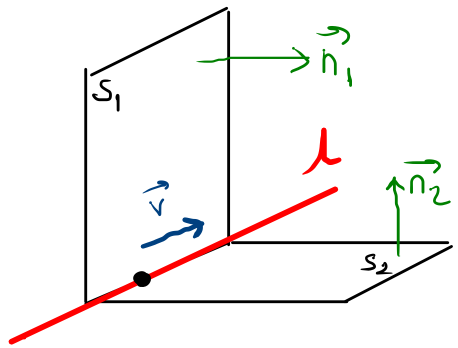
$\overrightarrow{P_0P} = (x-2)\vec{i} + y\vec{j} + (z-1)\vec{k}$

$\vec{n}.(\overrightarrow{P_0P}) = 0 \Rightarrow 3(x-2) - 2y - 2(z-1) = 0$

$3x - 2y - 2z - 4 = 0$

Kesişim Doğruları

iki düzlemin paralel olması için gerek ve yeter şart normallerinin paralel olmasıdır. Yani $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ ($k \in \mathbb{R}$) olmasıdır. Paralel olmayan iki düzlem ise bir doğruda kesişir.



$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{v} \perp \vec{n}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Ör: $\left.\begin{array}{l} S_1: 3x - 6y - 2z = 15 \\ S_2: 2x + y - 2z = 5 \end{array}\right\}$ düzlemlerinin kesişim doğrusunun skaler parametrik denklemlerini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{n}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \end{array}\right\} \quad \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$$

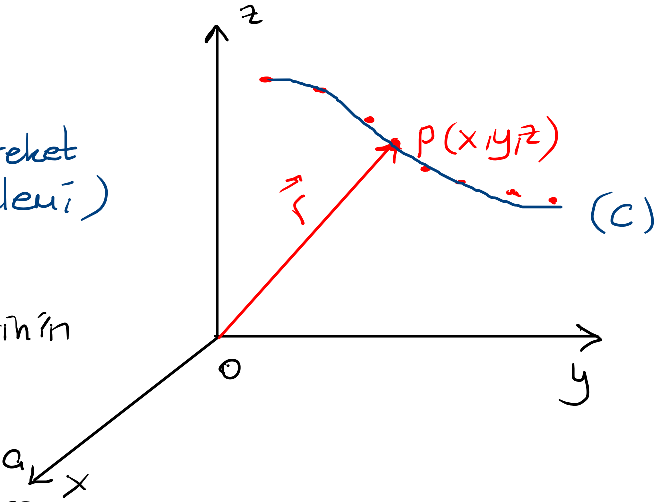
$$z = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 3x - 6y = 15 \\ 6/\ 2x + y = 5 \\ \hline 15x = 45 \Rightarrow x = 3 \\ \qquad\qquad\quad y = -1 \end{array}$$

$P_0(3, -1, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 + 14t \\ y = -1 + 2t \\ z = 15t \end{array}\right\} \text{Skaler parametrik denk.}$$

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Üç boyutlu uzayda bir (x,y,z) noktasının yer vektörü $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ şeklindedir. Eğer $\vec{r}$ vektörünün bileşenleri, değişim aralığı $[a,b]$ olan bir reel t değişkeninin fonksiyonları iseler o zaman $\vec{r}$'ye t'nin vektör değerli fonksiyonu denir.



$$\left.\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

(objenin hareket denklemi)

Vektör değerli bir $\vec{r}(t)$ fonksiyonunun tanım kümesi bileşenlerinin ortak tanım kümesidir.

Vektör değerli bir fonksiyon tanım kümesindeki her bir elemana bir vektör bağlar. Değer bölgesi ise tanım kümesindeki noktalara karşılık gelen vektörlerin topluluğudur.

Vektörel limit

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ vektör değerli bir fonksiyon, t_0 herhangi bir sayı olsun. Eğer, $\vec{L}=l_1\vec{i}+l_2\vec{j}+l_3\vec{k}$ olmak üzere $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{L}$ oluyorsa o zaman $\vec{r}$'nin t, t_0'a yaklaşırken limiti $\vec{L}$'dir.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t\to t_0}\left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right]$$

$$= \underbrace{\left[\lim_{t\to t_0} x(t)\right]}\vec{i} + \underbrace{\left[\lim_{t\to t_0} y(t)\right]}\vec{j} + \underbrace{\left[\lim_{t\to t_0} z(t)\right]}\vec{k}$$

$$= \quad l_1\,\vec{i} \quad + \quad l_2\,\vec{j} \quad + \quad l_3\,\vec{k}$$

$$= \vec{l}$$

NOT: $\varepsilon>0$ verildiğinde $0<|t-t_0|<\delta$ iken $|\vec{r}(t)-\vec{l}|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa t, t_0'a yaklaşırken vektör değerli $\vec{r}(t)$ fonksiyonunun limiti $\vec{l}$'dir.

Ör/ $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ $\qquad \lim_{t\to \frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = ?$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\left[\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}\right] = \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \cos t\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\right)\vec{j} + \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t\right)\vec{k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{\pi}{4}\vec{k}$$

Teorem:

$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, $\lim_{t\to t_0} \vec{R}(t) = \vec{b}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

i) $\lim_{t\to t_0} \left[\vec{r}(t) \mp \vec{R}(t)\right] = \left[\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)\right] \mp \left[\lim_{t\to t_0} \vec{R}(t)\right] = \vec{a} \mp \vec{b}$

ii) $\lim_{t\to t_0} \left[\lambda \vec{r}(t)\right] = \lambda \left[\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)\right] = \lambda . \vec{a}$

iii) $\lim_{t\to t_0} \left[\vec{r}(t) . \vec{R}(t)\right] = \left[\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)\right] . \left[\lim_{t\to t_0} \vec{R}(t)\right] = \vec{a} . \vec{b}$

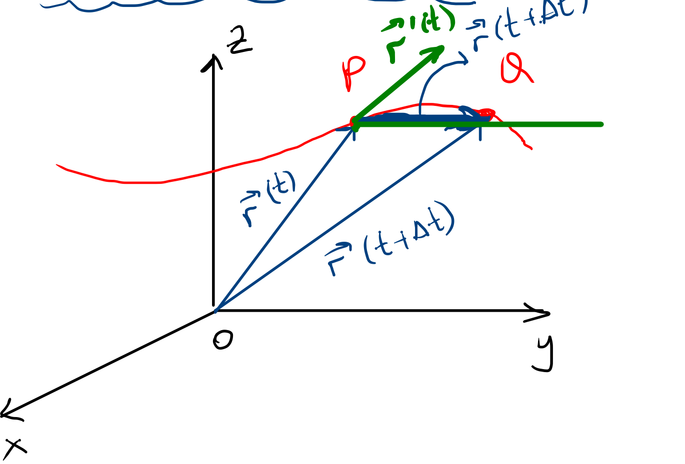
iv) $\lim_{t\to t_0} \left[\vec{r}(t) \times \vec{R}(t)\right] = \left[\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)\right] \times \left[\lim_{t\to t_0} \vec{R}(t)\right] = \vec{a} \times \vec{b}$

Vektörel Süreklilik

$\vec{r}(t)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı vektör değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ ise, $\vec{r}(t)$ vektör fonksiyonu tanım kümesindeki $t = t_0$ noktasında süreklidir denir. Eğer vektör değerli bir fonksiyon tanım kümesindeki her noktada sürekli ise bu vektör değerli fonksiyon süreklidir denir.

Ör/ $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ vektör değerli fonksiyonu bir uzay eğrisi gösterir ve sürekldir. Çünkü t'nin $(-\infty,\infty)$ aralığında alacağı her değer için $\vec{r}(t)$'nin bileşenleri süreklidirler.

Vektörel Türev



$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$ uzayda bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın konum vektörü ve $x(t), y(t), z(t)$ türevlenebilen fonksiyonlar olsunlar.

t ve $t+\Delta t$ anlarında parçacığın konumlarının farkı

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ 'dir.

$$\Delta\vec{r} = \left[x(t+\Delta t)\,\vec{i} + y(t+\Delta t)\,\vec{j} + z(t+\Delta t)\,\vec{k}\right] - \left[x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\right]$$

$$= \left[x(t+\Delta t) - x(t)\right]\vec{i} + \left[y(t+\Delta t) - y(t)\right]\vec{j} + \left[z(t+\Delta t) - z(t)\right]\vec{k}.$$

Δt sıfıra yaklaştıkça üç şey eşzamanlı olarak oluşur:

1) Eğri boyunca Q, P'ye yaklaşır.

2) PQ kiriş doğrusunun P'de eğrinin teğetinin konumuna yaklaştığı görülür.

3) $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ oranı ;

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{[x(t+\Delta t) - x(t)]}{\Delta t} \vec{i} + \frac{[y(t+\Delta t) - y(t)]}{\Delta t} \vec{j} + \frac{[z(t+\Delta t) - z(t)]}{\Delta t} \vec{k} \right\}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Tanımlar

Eğer $\vec{r}$ uzayda düzgün bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın konum vektörü ise,

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ parçacığın hız vektörüdür ve eğriye teğettir. Herhangi bir t anında, $\vec{V}$'nin yönü hareketin yönüdür. $\vec{V}$'nin büyüklüğü parçacığın süratini verir. Eğer varsa $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$ ivme vektörüdür.

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \rightarrow$ hız vektörü

$|\vec{V}| \rightarrow$ sürat

$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \rightarrow$ ivme vektörü

$|\vec{a}| \rightarrow$ ivme

$\frac{\vec{v}}{|\vec{V}|}$ birim vektörü, t anında hareketin yönüdür.

Türev kuralları

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$, t'nin türevlenebilir vektör fonksiyonları, $\vec{c}$ sabit bir vektör, λ keyfi bir skaler, f türevlenebilir keyfi bir skaler fonksiyon olsun;

1) $\frac{d}{dt}\vec{c} = \vec{0}$

2) $\frac{d}{dt}\left[\lambda \vec{a}(t)\right] = \lambda . \frac{d\vec{a}}{dt}$

3) $\frac{d}{dt}\left[f(t).\vec{a}(t)\right] = f'(t).\vec{a}(t) + f(t).\vec{a}'(t)$

4) $\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t) \mp \vec{b}(t)\right] = \vec{a}'(t) \mp \vec{b}'(t)$

5) $\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t).\vec{b}(t)\right] = \vec{a}'(t)\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\vec{b}'(t)$

6) $\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)\right] = \left[\vec{a}'(t) \times \vec{b}(t)\right] + \left[\vec{a}(t) \times \vec{b}'(t)\right]$

7) $\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(f(t))\right] = f'(t).\vec{a}'(f(t))$

8) $\vec{a}(t)$ uzunluğu sabit olan vektör değerli bir fonksiyon ise

$$\vec{a}(t).\vec{a}'(t) = 0$$

NOT: Eğer bir vektör değerli fonksiyon tanım kümesinin her noktasında türevlenebilir ise vektör fonksiyonu türevlenebilirdir denir. Eğer türev fonksiyonu sürekli ise ve asla sıfır olmuyorsa r tarafından gidilen eğri düzgün eğridir.